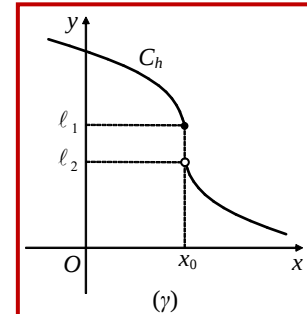
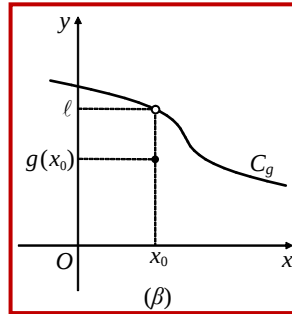
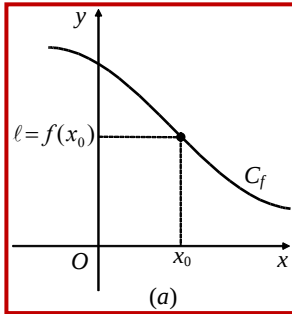


1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Από τις τρεις παραπάνω συναρτήσεις μόνο η $f(x)$ είναι συνεχής.

Παρατηρήσεις :

- Μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:
 - Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή
 - Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 . Για παράδειγμα:

$$\text{— Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 3 - x, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \text{ δεν είναι συνεχής στο } 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2) = 2, \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - x) = 3,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

- Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε για να είναι συνεχής στα άκρα a, β θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$
- Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, **συνεχής συνάρτηση**.
- Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση P είναι **συνεχής** γιατί ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

- Κάθε **ρητή** συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι **συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

- Οι συναρτήσεις και είναι **συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$.
- Τέλος, αποδεικνύεται ότι: οι συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ είναι **συνεχείς**.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις

$f + g$	$c \cdot f$ όπου $c \in \mathbb{R}$,	$ f $
$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$	$\sqrt[n]{f}$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

Π.χ: $f(x) = \epsilon\phi x$ και $g(x) = \sigma\phi x$ είναι συνεχείς ως πηλίκια συνεχών συναρτήσεων.

Παρατήρηση

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί οι $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$, $c \cdot f$ όπου $c \in \mathbb{R}$ να είναι συνεχείς ενώ οι f και g να είναι

ασυνεχείς π.χ: $f(x) = \begin{cases} 3, & x \geq 0 \\ -3, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -3, & x \geq 0 \\ 3, & x < 0 \end{cases}$. Είναι ασυνεχείς στο

μηδέν, ενώ οι συναρτήσεις $(f + g)(x) = 0$, $(f \cdot g)(x) = -9$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = -1$, $|f(x)| = 3$,

$0 \cdot f(x) = 0$, για κάθε πραγματικό x , είναι συνεχείς στο μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η **σύνθεση** τους $g \circ f$ είναι **συνεχής** στο x_0 .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\phi(x) = \eta\mu(x^3 + 1)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 1$ και $g(x) = \eta\mu x$.

Παρατηρήσεις

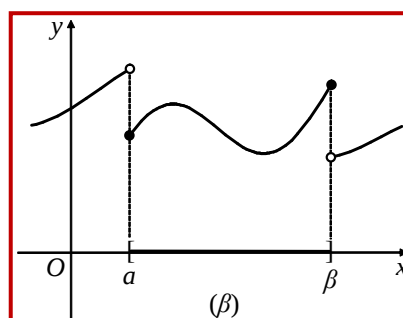
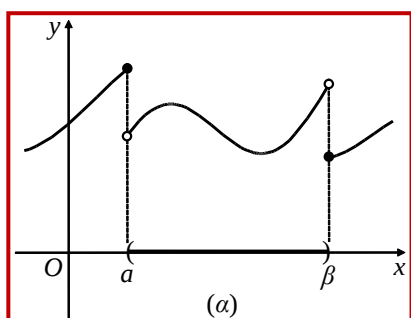
- Αν θέλουμε να εξετάσουμε ως προς τη συνέχεια μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, κάνουμε τα εξής :
 - Εξηγούμε γιατί είναι συνεχής κάθε κλάδος της συνάρτησης ξεχωριστά, στα ανοιχτά διαστήματα που ορίζεται.
 - Εξετάζουμε (με τον ορισμό) τη συνέχεια στα σημεία που αλλάζει ο τύπος. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0 , αλλιώς όχι. Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της και μας ζητάνε να προσδιορίσουμε κάποιες παραμέτρους τότε κάνουμε χρήση του ορισμού : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή αν χρειαστεί κάνουμε χρήση πλευρικών ορίων π.χ η συνάρτηση είναι δίκλαδη.
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , και μας ζητάνε τη τιμή $f(x_0)$, τότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και αντίστροφα, αν μας ζητείται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε αρκεί να βρούμε το $f(x_0)$.
- Αν μας δίνουν μια συναρτησιακή σχέση της f και γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο a , τότε για να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού D_f , αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής σε τυχαίο σημείο $x_0 \in D_f$, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής στην αρχική συναρτησιακή σχέση.

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) . (Σχ.α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (\text{Σχ.}\beta)$$



Θεώρημα του Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

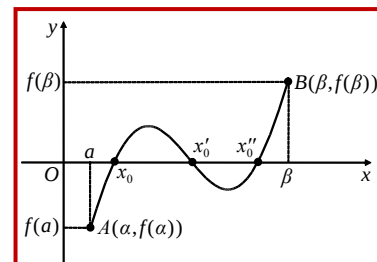
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano

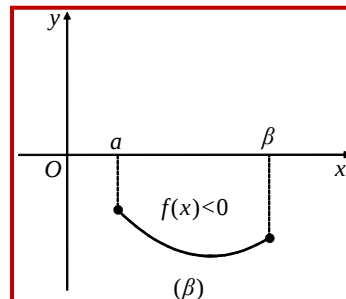
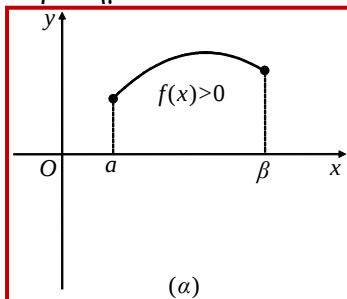
Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x' , η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Παρατηρήσεις

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Απόδειξη: Αν η f δεν διατηρούσε σταθερό πρόσημο τότε θα υπήρχαν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) < 0$ ή $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$ δηλαδή $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, που σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης μας, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

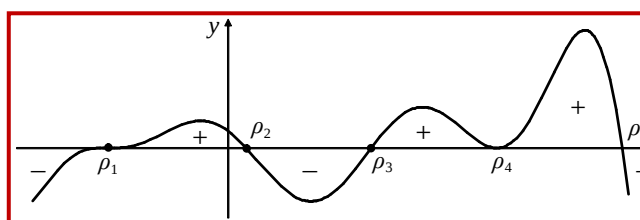


- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x . Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

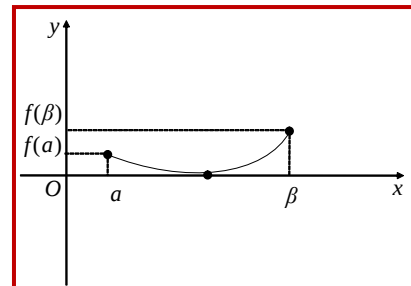
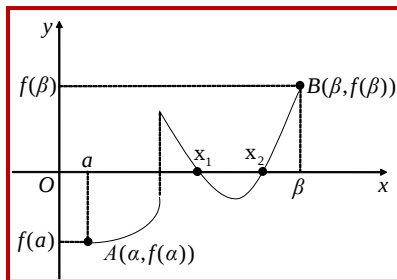
α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f .

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν



οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

- Αν η f είναι **συνεχής** και **γνησίως μονότονη** στο $[α,β]$ και επί πλέον ισχύει $f(α) \cdot f(β) < 0$, τότε η f έχει **ακριβώς μία** ρίζα στο $(α,β)$.
- Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:
 - $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
 - $f(\xi) > 0$ με $\xi \in \Delta$
 τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:
 - $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$
 - $f(\xi) < 0$ με $\xi \in \Delta$
 τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει πάντα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία πραγματική συνάρτηση $f : [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει ρίζα στο $(α,β)$ και δεν είναι συνεχής στο $(α,β)$ ή ότι οι τιμές $f(α), f(β)$ δεν είναι ετερόσημες δηλαδή δεν ισχύει : $f(α) \cdot f(β) < 0$



- Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.
- Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, δεν σημαίνει ότι η f δεν έχει ρίζα στο $(α,β)$.

Παρατηρήσεις για ασκήσεις

1. Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα $(α,β)$ κάνουμε τα εξής :
 - φέρνουμε όλους τους όρους στο α' μέλος
 - θεωρούμε το α' μέλος ως μια συνάρτηση f εξασφαλίζουμε για την f τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[α,β]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα.
2. Αν μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει περισσότερες ρίζες, τότε εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία σε περισσότερα διαστήματα, είτε χωρίζοντας το αρχικό διάστημα σε μικρότερα διαστήματα, είτε εντοπίζοντας νέα διαστήματα ξένα μεταξύ τους.

3. Αν έχουμε παρανομαστές, τότε κάνουμε απαλοιφή και μετά ορίζουμε την συνάρτηση.
4. Αν μας ζητάνε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$ τότε αρκεί να δείξουμε ότι $f(a) \cdot f(\beta) \leq 0$ και διακρίνω τις περιπτώσεις
 - αν $f(a) \cdot f(\beta) = 0$, τότε οι ζητούμενες ρίζες είναι το a ή το β .
 - αν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ τότε εφαρμόζω $\theta.bolzano$.
5. Αν σε κάποιο άκρο δεν ορίζεται η $f(x)$ τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο της τιμής της f από όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

Αν π.χ: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \kappa > 0$ τότε υπάρχει a κοντά στο x_0^+ ώστε $f(a) > 0$

6. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (a, β) : τότε δείχνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (a, β) με θ . Bolzano και μετά αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) , οπότε η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.
7. Από τη σχέση $f(x) \cdot g(x) = 0$ δεν συνεπάγεται ότι $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ π.χ:

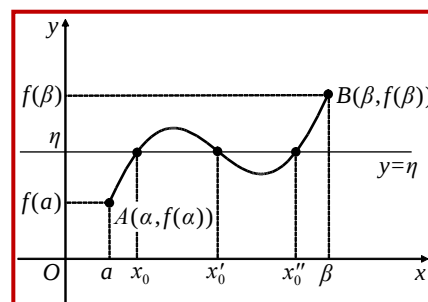
$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases} \quad \text{προφανώς ισχύει: } f(x) \cdot g(x) = 0$$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

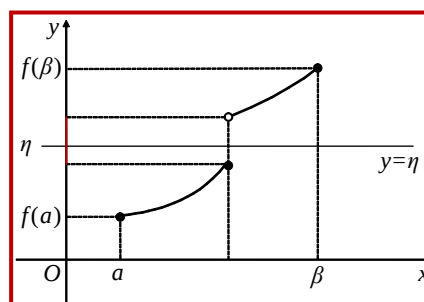


Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών

- Η παράλληλη ευθεία $y = \kappa$ προς τον xx' θα τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο (στο συγκεκριμένο παράδειγμα σε τρία σημεία)
- Κάθε σημείο του άξονα yy' που βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ θα είναι και τιμή της συνάρτησης f .

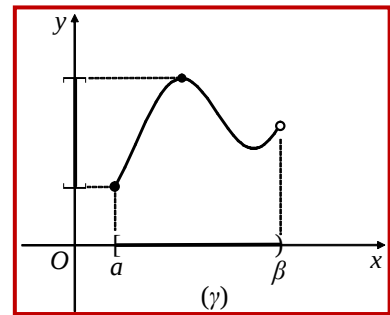
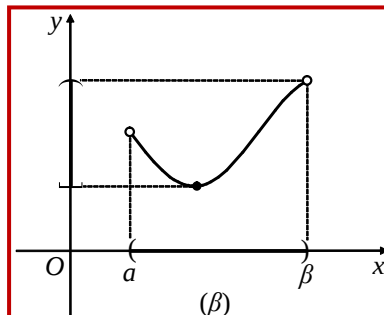
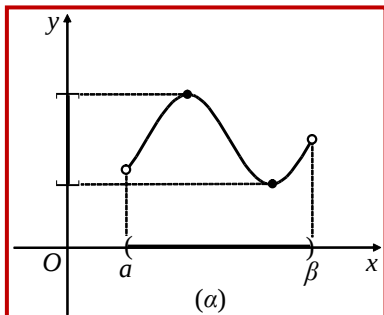
Παρατηρήσεις:

- Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν **παίρνει** υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



- Αποδεικνύεται ότι: Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός

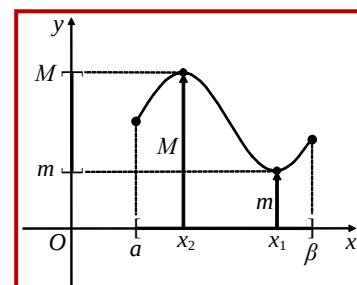
διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



- Το **αντίστροφο** του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών **δεν ισχύει υποχρεωτικά**, δηλαδή αν μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, \beta]$, παίρνει κάθε τιμή μεταξύ του $f(a)$ και του $f(\beta)$, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ είναι μία συνεχής γραμμή.
- Αν στο σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης περιέχεται το μηδέν τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.

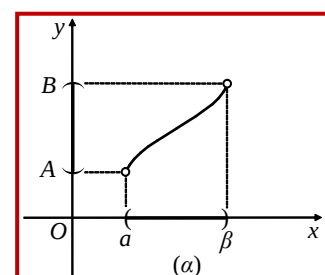


Παρατήρηση:

- Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.
- Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και

$$B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$



Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

