

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

2.1 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 με τον ορισμό

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 8x - 9 \\ g(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 3} \\ h(x) = \alpha x^v, v \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2. Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, να βρεθεί το $f'(0)$

3. Έστω $f(x) = \sqrt{x + \kappa}$, $\kappa > 0$ να βρεθεί η $f'(0)$

4. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10, & x \leq 1 \\ \sqrt[5]{x + 31}, & x > 1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

5. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$(Υποδ: f \text{ συνεχής στο } 0 \text{ και } \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq |x| \Rightarrow f'(0) = 0)$$

6. Έστω $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$. Να βρεθεί το $f'(1)$, με τον ορισμό.

7. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^2 - x^4 \leq f(x) \leq x^2 + x^4$ και $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Να δειχθεί ότι $f(0)=0$ και $\phi'(0) = 1$

8. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(\psi)| \leq |x^2 - x\psi|$ για κάθε πραγματικούς αριθμούς x, ψ . Να δειχθεί ότι:

α. f συνεχής στο μηδέν.

β. $f'(0)=0$

Υποδ: α) για $\psi=0$ έχω: $|f(x) - f(0)| \leq |x^2| \Rightarrow -|x|^2 + f(0) \leq f(x) \leq |x|^2 + f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

β) $|f(x) - f(0)| \leq |x|^2 \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq |x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 = f'(0)$

9. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\kappa \cdot \eta \mu x - x^{1940} \leq f(x) \leq \kappa \cdot \eta \mu x$ και $\forall x \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{N}$. Να βρεθεί το $f'(0)$

10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, τότε η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

11. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2, & x < 2 \\ x^2 - 4x + 5, & x \geq 2 \end{cases}$. Να εξεταστεί αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

12. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 5$ και f συνεχής στο $x_0 = 2$ να δείξετε ότι $f'(2) = 5$

13. Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 - \kappa x + 1, & x \leq 0 \\ \kappa - x, & x > 0 \end{cases}$. Να βρεθεί το κ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

14. Έστω $f(x) = \begin{cases} \alpha \eta \mu x, & x \leq \pi \\ \alpha x^2 + \beta, & x > \pi \end{cases}$. Να βρεθούν τα α και β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$

15. Αν $f(x) = \sqrt{x+3}$, να βρεθεί αν υπάρχει το $f'(-3)$

16. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\eta \mu(\pi x)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο μηδέν :

17. Έστω $f(x) = \begin{cases} 3x + \beta, & x \leq 1 \\ \alpha x^3 + 1, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεθούν τα α και β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0 = 1$

18. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sin^2(\pi x) - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να βρεθεί το $f'(0)$

19. Έστω $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \leq 1 \\ 2|x - 1|, & x > 1 \end{cases}$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 1:

20. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $g(x) = (x - 1) \cdot f(x)$ και f συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

21. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(x + \psi) = f(x) + f(\psi), \quad \forall x, \psi \in \mathbb{R}. \text{ Αν υπάρχει η } f'(0), \text{ ναδειχθεί ότι :}$$

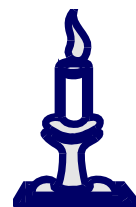
$$\phi'(x) = -f'(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \phi(x) = f(-x)$$

22. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να δείξετε ότι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 3h) - 3f(x_0)}{3h} = 2f'(x_0)$$

23. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να δείξετε ότι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(x_0 + h) - f^3(x_0)}{h} = 3f^2(x_0) \cdot f'(x_0)$$



24. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3 f(1)}{x - 1} = f'(1) - 3f(1)$$

25. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3\eta\mu x}{x^2} = 5$ Να

δειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρεθεί το $f'(0)$

26. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο μηδέν και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$.

B1. Να υπολογιστεί το : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

B2. Να δειχθεί ότι : $f'(0) = 5$

B3. Να υπολογιστεί το : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - f(x)}{\eta \mu x}$.

B4. Να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} = 5$.

Υπόδ: B₂) Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = x \cdot g(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot g(x) = 0 \cdot 5 = 0$

B_e) Ομω f συνεχής στο 0 ορα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{υπόδ.}}{=} 5$

B₃) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - f(x)}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(x) - 1)}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{(f(x) - 1)}{\eta \mu x}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - 1)}{\eta \mu x} = 5 \cdot \frac{(0 - 1)}{1} = \boxed{-5}$

B₄) Ισχύει: $e^x \geq x+1 \xrightarrow{x: -x} e^{-x} \geq -x+1 \Rightarrow \frac{1}{e^x} \geq -x+1$
 $\xrightarrow{\text{πομπά στο } 0} \frac{1}{1-x} \geq e^x \xrightarrow{\text{από την ανίσωση}} x+1 \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \text{ πομπά στο } 0$
 Για $x = f(x)$ έχουμε: $f(x)+1 \leq e^{f(x)} \leq \frac{1}{1-f(x)} \xrightarrow{f(0)=0}$
 $f(x) \leq e^{f(x)} - 1 \leq \frac{1}{1-f(x)} - 1 \Rightarrow f(x) \leq \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{1 - f(0)} \leq \frac{f(x)}{1 - f(x)}$
 • Για $x > 0$ έχουμε: $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{1-f(x)}$
 • Για $x < 0$ έχουμε: $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{1-f(x)}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} = \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} = 5}$

Η ανάλυση των είναι ίδιος

$$\text{ισχύει: } e^x \geq x+1 \xrightarrow{x: f(x)} e^{f(x)} \geq f(x)+1 \Rightarrow$$

$$e^{f(x)} - 1 \geq f(x) \quad (1)$$

$$\text{για } x > 0 \quad (1) \Rightarrow \frac{e^{f(x)} - 1}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} \geq \frac{f(x) - f(0)}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 5$$

$$\text{για } x < 0 \quad (1) \Rightarrow \frac{e^{f(x)} - 1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 5 \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} = 5$$

Το ίδιο είναι ως δεν γνωρίζω αν $\exists$ το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x}$
 δηλαδή δεν ξέρω αν $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} - e^{f(0)}}{x}$

27. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f'(0)=1$ και $f(x+\psi) = f(x) + f(\psi) + x^2 \cdot \psi$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

28. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x+\psi) = e^\psi \cdot f(x) + e^x \cdot f(\psi)$. Να δείξετε ότι:

1. $f(0)=0$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(άσκηση 25 στα όρια)

3. $f'(x_0) = e^{x_0} \cdot f'(0) + f(x_0)$

29. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\sin x - 1 \leq f(x) \leq x^4, \forall x \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθεί το $f(0)$

β. Να βρεθεί το $f'(0)$

30. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \varepsilon \varphi x}{x} = 5$

α. Να βρεθεί το $f(0)$

β. Να βρεθεί το $f'(0)$

Υποδ: α) ισχύει: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, θέτω $g(x) = \frac{f(x) + \varepsilon \varphi x}{x} \Rightarrow f(x) = x \cdot g(x) - \varepsilon \varphi x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \cdot 5 - 0 = 0$

β) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, όμως $g(x) = \frac{f(x) + \varepsilon \varphi x}{x} = \frac{f(x)}{x} + \frac{\varepsilon \varphi x}{x} \Rightarrow$

$\frac{f(x)}{x} = g(x) - \frac{\varepsilon \varphi x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5 - 1 = 4$. γιατί $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x} = 1$, άρα $f'(0) = 4$

2.2 – 2.3 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x^2+1)$	2) $g(x) = \ln(\eta\mu^2 x)$
3) $h(x) = \sigma\upsilon\nu^2(2x\sqrt{x})$	4) $\varphi(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$

2. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$	2) $g(x) = \sigma\upsilon\nu^3(\ln(x^2+3))$
3) $h(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2-5)$	4) $\varphi(x) = e^{x+\eta\mu x}$

3. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης με τύπο: $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$

4. Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2 + |x-1| \text{ και } g(x) = \eta\mu(\ln x) + \sigma\upsilon\nu(3\sqrt{x}+2)$$

5. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+4}$	2) $g(x) = \eta\mu^2(\sigma\upsilon\nu^2 x)$
3) $h(x) = \eta\mu(x + \sqrt{x^2+1}) - \sigma\upsilon\nu(\sqrt{x^2+1})$	4) $\varphi(x) = e^{e^x}$

6. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{2} + \frac{\eta\mu(2x)}{2}$	2) $g(x) = 3^{x^x}, x > 0$
3) $h(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}, x > 0$	4) $\varphi(x) = e^{\sqrt{x}}$

7. Έστω $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$. Να δειχθεί ότι

$$\alpha) \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \text{ για } x \neq 1, 2, 3$$

$$\beta) f''(x) \cdot f(x) < [f'(x)]^2$$

8. Έστω $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Να δειχθεί ότι α) $f''(x) = f(x)$ και β)

$$\varphi''(x) = \varphi(x)$$

9. Έστω $f(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma)$. Να δειχθεί ότι:

$$\frac{1}{f'(\alpha)} + \frac{1}{f'(\beta)} + \frac{1}{f'(\gamma)} = 0$$

10. Έστω $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ αν ισχύουν:

α) $f(0) = 0$ β) $f'(0) = 1$, γ) $f''(0) = 2$, δ) $f'''(0) = 3$ και ε) $f''''(0) = 4$

11. Αν $f(x) = e^x \cdot e^{\frac{x}{e}}$, να δειχθεί ότι $\frac{f'(x)}{f(x+1)} = e^{\frac{e+1}{e}}$

12. Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^*$. □ Να δειχθεί ότι:

$$f''\left(\frac{x+\psi}{2}\right) = \frac{f'(x) - f'(\psi)}{x - \psi} \quad \text{για } x, \psi \in \mathbb{R}^* \text{ με } x \neq \psi$$

13. Αν $f(x) = e^{x \cdot \eta \mu x}$. Να δειχθεί ότι $\frac{f'(x)}{\eta \mu x} - f(x) = x \cdot f(x) \cdot \sigma \phi x$

14. Θεωρώ την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Αν ισχύει: $\ln f(x) = \varepsilon \phi \frac{x}{2}$, $x \neq (2\kappa + 1)\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$,
να δειχθεί ότι: $f'(x) \cdot \eta \mu x = f(x) \cdot \ln f(x)$

15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $5e^{2f(x)} + 2e^{-5x} = c$. Να δειχθεί ότι $e^{2\psi} \cdot e^{3x} \cdot \frac{d\psi}{dx} = e^{-2x}$, όπου
 $f(x) = \psi$

16. Αν f παραγωγίσιμη με $f(\eta \mu x) = \sigma \upsilon \nu x$, να δειχθεί ότι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

17. Αν $f(x) = \begin{cases} \varepsilon \phi x, & \text{αν } 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sigma \phi x, & \text{αν } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, να εξεταστεί η παραγωγισιμότητα στο $\pi/4$

18. Έστω $f(x) = \varepsilon \phi^x 1^0 + \varepsilon \phi^x 2^0 + \dots + \varepsilon \phi^x 89^0$. Να δειχθεί ότι $f'(0) = 0$

19. Έστω $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sin x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Αν $g(0) = 0$ και $g'(0) = \kappa > 0$, να

βρεθεί, αν υπάρχει η $f'(0)$

20. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(\eta \mu x + \sigma \nu x) = \eta \mu^2 x + x^2$, να βρεθεί το $f'(1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

1. Να δείξετε ότι:

α) αν $f(x) = 3\sigma \nu x - 2\sigma \nu^2 x$, τότε $f'(x) + f(x) \epsilon \phi x - \eta \mu 2x = 0$.

β) αν $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$, τότε $x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$.

2. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

$$f'(4) = 0 \text{ και } (f'(x))^2 = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

α) να βρεθεί ο τύπος της f .

β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 1$.

Υποδ: Αν ο βαθμός της f είναι n τότε η f' έχει βαθμό $n-1$, άρα $2(n-1) = n$, δηλαδή $n=2$. Προφανώς $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με

$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow 8a + b = 0 \text{ και } (2ax + b)^2 = ax^2 + bx + \gamma, \text{ άρα } a = \frac{1}{4} \text{ και } b = -2, \text{ ενώ } \gamma = b^2 = 4.$$

3. Μια δύναμη εφαρμόζεται σε κινητό που κινείται σε άξονα και του οποίου η απόσταση από την αρχή O τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \ln(t+1)$, $t > 0$ (όπου t ο χρόνος σε sec).

α) Να δείξετε ότι το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας όταν εφαρμόστηκε η δύναμη.

β) Να δείξετε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού, 3 sec μετά την εφαρμογή της δύναμης.

4. Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x) + xy + \alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = -\alpha$.

β) Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)e^{x_0} + x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Υποδ: α) Για $x = y = 0$ στη δοσμένη σχέση προκύπτει $f(0) = -\alpha$

β) Για $x = 1$ και $y = 0$ προκύπτει $\alpha(1 - e) = 0$, άρα $\alpha = 0$

$$\gamma) f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ με βάση τη δοσμένη σχέση.}$$

Για $x = x_0$ και $y = h$ προκύπτει:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} f(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \frac{e^h - 1}{h} + x_0,$$

$$\text{αλλά } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = g'(0) \text{ όπου } g(x) = e^x, \text{ άρα } g'(0) = 1,$$

$$\text{ενώ } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{[f(h) - f(0)]}{h} = e^{x_0} f'(0).$$

Άλλος τρόπος, παραγωγίζω ως προς x την αρχική και θέτω $x=0$ και $y = x_0$

5. Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο

$$x^4 = x \cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ προσθεοί}}, \text{ άρα } (x^4)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ φορές}} \right)', \text{ δηλαδή } 4x^3 =$$

$$\underbrace{3x^2 + 3x^2 + \dots + 3x^2}_{x \text{ φορές}}, \text{ άρα } 4x^3 = 3x^3, \text{ επομένως } 4 = 3 !!!$$

Υποδ: Το x^4 δεν μπορεί να γραφεί $x^3 + x^3 + \dots + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος στο σημείο M με τετμημένη $x_0 = 2$.
2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος στο σημείο M με τετμημένη $x_0 = 3$.
3. Σε ποιο σημείο της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τη πρώτη διχοτόμο.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ ορισμένη στους πραγματικούς αριθμούς. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β , ώστε η ευθεία $\psi = 2x$ να εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης στο σημείο $M(2,4)$.
5. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta$ να περνά από τα σημεία $K(1,3)$ και $\Lambda(2,9)$. Κατόπιν να βρεθεί σε ποιο σημείο της καμπύλης η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα xx' .
6. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = kx^2 + kx + \lambda$. Να βρεθούν τα πραγματικά k, λ ώστε η ευθεία $\psi = 3x$ να εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης στο σημείο $M(1,3)$.
7. Ποια γωνία σχηματίζει με τον άξονα xx' η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + x - 2$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$
8. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης $f(x) = x^2 - x - 6$ στα σημεία όπου αυτή τέμνει τους άξονες.
9. Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 10x + 8$ στο σημείο με τετμημένη 2, η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό.

10. Ναδειχθεί ότι η εφαπτομένη γραφικής παράστασης της

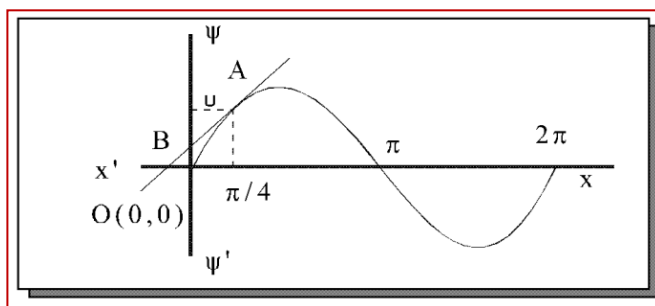
$f(x) = \eta \mu x$ στο σημείο με

τετμημένη $x_0 = \frac{\pi}{4}$, τέμνει

άξονα $\psi\psi'$ στο σημείο

$B\left(0, \frac{\sqrt{2} \cdot (4 - \pi)}{8}\right)$ και ότι

$E_{OAB} = \frac{\sqrt{2} \cdot (4 - \pi) \cdot \pi}{64}$, όπου A το σημείο επαφής με το γράφημα της f .



της
τον

11. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου: $x^2 + \psi^2 = R^2$, της έλλειψης

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και της παραβολής $\psi^2 = 2px$, στο σημείο

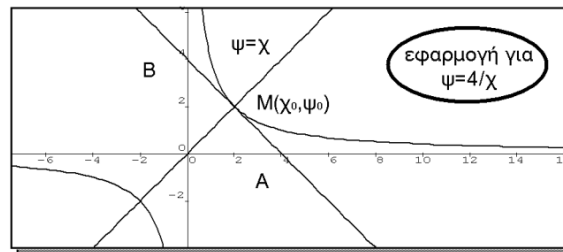
$M(x_0, \psi_0)$.

12. Να βρεθεί το α ώστε η ευθεία $\psi = \alpha x + 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = x^2 + x + 1$ και να βρεθεί το σημείο επαφής.

13. Έστω $M(x_0, \psi_0)$ το σημείο τομής γραφικής παράστασης της

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} \text{ και της πρώτης}$$

διχοτόμου με $\alpha > 0, x > 0$. Δείξτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M σχηματίζει με τους άξονες xx' και $\psi\psi'$ ισοσκελές τρίγωνο εμβαδού $E=2\alpha$



της

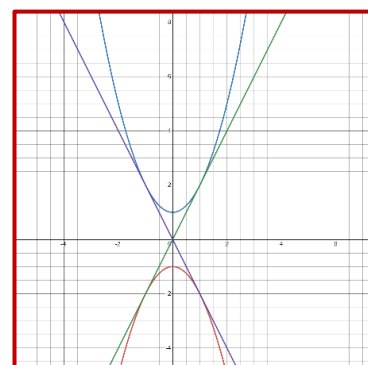
ότι η

14. Έστω $f(x) = \alpha x^2 + 5x + 3$. Να βρεθεί το α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 1 να σχηματίζει με τον xx' γωνία 60°

15. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε πραγματικό αριθμό x . Αν η ευθεία $\psi = 3x - 5$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τεταγμένη $\psi_1 = 1$, να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f(2 \cdot e^{5x})$ στο σημείο με τετμημένη $x_2 = 0$

16. Δίνεται $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ με $f(x) = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{x})^2$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Στο διάγραμμα της σε τυχαίο σημείο φέρνουμε εφαπτομένη που τέμνει του άξονες στα σημεία A και B . Δείξτε ότι το άθροισμα $OA + OB$ είναι σταθερό, όπου O η αρχή των αξόνων.

17. Έστω $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = -x^2 - 1$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων και ναδειχθεί ότι τέμνονται στην αρχή των αξόνων.



Λύση:

Εστω $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, g(x_2))$ τα

σημεία επαφής των C_f, C_g με την κοινή εφαπτομένη

ισχύουν:

$$(\xi_1): \psi - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow \psi - x_1^2 - 1 = 2x_1(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\psi = 2x_1x - 2x_1^2 + x_1^2 + 1 \Leftrightarrow \psi = 2x_1x - x_1^2 + 1 \quad (1)$$

$$(\xi_2): \psi - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \psi + x_2^2 + 1 = -2x_2(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\psi = -2x_2x + 2x_2^2 - x_2^2 - 1 \Leftrightarrow \psi = -2x_2x + x_2^2 - 1 \quad (2)$$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} 2x_1 = -2x_2 \\ -x_1^2 + 1 = x_2^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -x_1^2 = x_2^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -x_1^2 = x_1^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \mp 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι: $A_1(1, 2), B_1(-1, -2)$ και $A_2(-1, 2), B_2(1, -2)$

$$\text{Από } (\xi): \psi - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow \psi = 2x \quad (\xi): \psi - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow \psi = -2x$$

Άλλος τρόπος: Πρέπει να ισχύουν:

$$f'(x_1) = g'(x_2) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_1) = \lambda_{AB} \\ g'(x_2) = \lambda_{AB} \end{cases} \quad \begin{matrix} f'(x_1) = 2x_1, g'(x_2) = -2x_2 \\ \lambda_{AB} = \frac{g(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{g(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 2x_1 \\ \text{ή} \\ \frac{g(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2^2 - 1 - x_1^2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_1^2 \\ -x_2^2 - 1 - x_1^2 - 1 = -2x_1x_2 - 2x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = 2 \\ -x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x_1x_2 = -1 \\ x_1^2 = x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1^2 = x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \mp 1 \end{cases}$$

Αν $x_1 = x_2$ η κοινή εφαπτομένη θα είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = x_1$ ατοπο (χρειάζεται να υπάρχει κατακόρυφη

εφαπτομένη των καμπύλων άρα $x_1 = -x_2$

επομένως από τις σχέσεις έχω: $x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$ άρα $x_2 = \mp 1$

Άρα τα σημεία είναι $A_1(1, 2), B_1(-1, -2)$ ή $A_2(-1, 2), B_2(1, -2)$

18. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

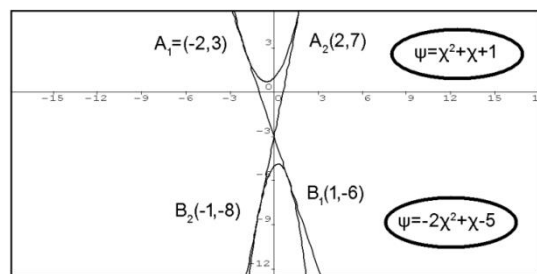
$$f(x) = x^2 + x + 1, g(x) = -2x^2 + x - 5$$

επιδέχονται κοινές εφαπτόμενες, να

βρεθούν τα σημεία επαφής καθώς και οι εξισώσεις αυτών. Να αποδειχθεί ότι τέμνονται στον άξονα $\psi\psi'$

19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = x^4 + 1$.

α. Να δείχθεί ότι f άρτια

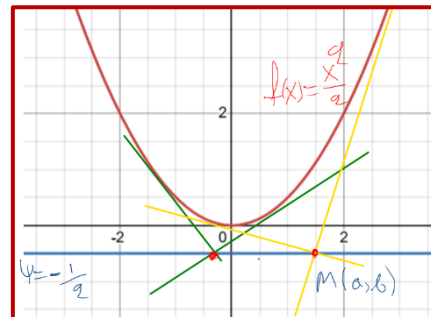


β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$

γ. Ναδειχθεί ότι η ευθεία $\psi = x$ εφαπτεται στην C_f στο σημείο $A(1,1)$

20. Έστω $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Να βρείτε τα σημεία $M(a,b)$

επιπέδου, από τα οποία οι εφαπτόμενες που φέρνουμε στην C_f είναι κάθετες.



του

Υπόλ.

Έστω $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία επαφής των εφαπτομένων με την C_f τότε η εξίσωση των εφαπτομένων είναι $\psi - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ $f(x) = \frac{x^2}{2}$
 $f'(x) = x$

$$\psi - \frac{x_1^2}{2} = x_1(x - x_1) \Rightarrow 2\psi - x_1^2 = 2x_1x - 2x_1^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2 - 2x \cdot x_1 + 2\psi = 0$$

Η ευθεία αυτή ως προς (x, ψ) εφαπτόμενη για το σημείο $M(a,b)$ άρα $x_1^2 - 2ax_1 + 2b = 0$

Η παραπάνω εξίσωση είναι τριώνυμο ως προς x_1 . Πρέπει να έχει δύο λύσεις x_1, x_2 άρα πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8b > 0$

και επίσης ισχύει $x_1 \cdot x_2 = p = 2b$

όπως $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = -1$ $b = -\frac{1}{2}$

Αν $b = -\frac{1}{2}$ $\Delta = 4a^2 + 4 > 0$ το a είναι ελεύθερο. Άρα τα σημεία βρίσκονται συν ευθεία $\psi = -\frac{1}{2}$ και είναι τα $M(a, -\frac{1}{2})$.

21. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ισχύει:

- f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f'(3) = 1$.
- $g(x) = f(x^2 + 2x) - 3x$

Να δείξετε ότι:

- Η εφαπτομένη της C_f στο $A(3, f(3))$ είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της C_g στο $B(1, g(1))$
- Η εφαπτομένη της C_f στο $A(3, f(3))$, με κατακόρυφη μετατόπιση 1 μονάδα προς τα κάτω, θα συμπίψει με την εφαπτομένη της C_g στο $B(1, g(1))$

Υποδ: α) αρκεί να δείξουμε ότι: $f'(3) = g'(1)$.

$$\beta) (\varepsilon_1): \psi = x - 3 + f(3) . (\varepsilon_2): \psi = x + g(1) - 1 .$$

$$\text{Όμως } g(1) = f(3) - 3 . \text{ Άρα τελικά}$$

$$(\varepsilon_1): \psi = x + g(1) . (\varepsilon_2): \psi = x + g(1) - 1 , \text{ άρα το συμπέρασμα.}$$

22. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και η οποία έχει εφαπτομένη την ευθείας $\psi = 2x - 1$ στο σημείο $A(1, f(1))$

α. Να δείξετε ότι: $f(1) = 1$

β. Να δείξετε ότι: $f'(1) = 2$

γ. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

δ. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 1}{x - 1}$

ε. Να βρεθεί το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 3h) - 1}{h}$

στ. Αν η f είναι πολωνυμική $2^{\text{ου}}$ βαθμού και τέμνει τον ψ' στο $(0, 1)$, να βρεθεί η f .

23. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ ώστε να ισχύει: $f^3(x) + f(x^3) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Υποδ: $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1/3$ (στο σημείο 1 που είναι παραγωγίσιμη η f ισχύουν όλοι οι κανόνες παραγωγίσιμης, δεν χρειάζεται δηλαδή να είναι η f παραγωγίσιμη παντού.)

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x + 1$.

1) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

2) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $x_2 = 2$.

25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

1) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

2) Να βρεθεί το σύνολο τιμών

3) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M(6, f^{-1}(6))$.

Λύση: • $A_f = \mathbb{R}$. εστω $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$
 $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$ } $\Rightarrow$

$$x_1^3 + 2x_1 + 3 < x_2^3 + 2x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ άρα } f \uparrow \text{ άρα αντιστρέφεται.}$$

$$\bullet f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ Άρα } A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

• Η εξίσωση της εφ'απτομένης είναι:

$$\psi - f^{-1}(6) = (f^{-1})'(6) (x - 6)$$

$$\text{Εστω } f^{-1}(6) = u \Rightarrow f(u) = 6 \Rightarrow u^3 + 2u + 3 = 6 \Rightarrow u^3 + 2u - 3 = 0 \Rightarrow (u-1)(u^2 + u + 3) = 0 \Rightarrow u = 1$$

Άρα $f^{-1}(6) = 1$ οπότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα
 έχω $(f^{-1}(f(x)))' = x' \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow$

$$(f^{-1})'(x^3 + 2x + 3) \cdot (3x^2 + 2) = 1 \xrightarrow{x=1} (f^{-1})'(6) \cdot 5 = 1 \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{5} \text{ . Άρα τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: } \psi - 1 = \frac{1}{5}(x - 6) \Rightarrow \boxed{\psi = \frac{x}{5} - \frac{1}{5}}$$

Επειδή η εκφώνηση λέει ότι $\exists (f^{-1})'(x)$ μπορώ να παραγωγίσω την παραπάνω σχέση. Οπως επειδή να η f είναι παραγωγισμή μπορώ εναλλακτικά να χρίψω:

$$f(f^{-1}(\psi)) = \psi \quad \forall \psi \in f(A) \xrightarrow[\text{προς } \psi]{\text{παραγ. ως προς } \psi} f'(f^{-1}(\psi)) \cdot (f^{-1})'(\psi) = 1 \xrightarrow[\substack{f^{-1}(6)=1 \\ f(1)=6}]{f^{-1}(6)=1} \\ f'(1) \cdot (f^{-1})'(6) = 1 \xrightarrow{f'(1)=5} (f^{-1})'(6) = \frac{1}{5}$$

26. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

1) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

2) Αν η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της να βρεθεί η εξίσωση της

εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M(6, f^{-1}(6))$. (συνέκρινε τις δυο παραπάνω ασκήσεις)

Λύση: όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση η f αντιστρέφεται. η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $\psi - f'(6) = (f^{-1})'(6)(x-6)$. με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f^{-1}(6) = 1$. Τώρα για το $(f^{-1})'(6)$ επειδή δεν μας δίνει ότι είναι παραγωγίσιμη αλλά μόνο συνεχής θα πάρει με τον ορισμό:

$$(f^{-1})'(6) = \lim_{\psi \rightarrow 6} \frac{f^{-1}(\psi) - f^{-1}(6)}{\psi - 6} = \lim_{\psi \rightarrow 6} \frac{f^{-1}(\psi) - 1}{\psi - 6}$$

$$\frac{f^{-1}(\psi) = x}{\psi = f(x)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{f(x) - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 3)}$$

όπως f^{-1} συνεχής στο 6
 δίνω: $\lim_{\psi \rightarrow 6} f^{-1}(\psi) = f^{-1}(6) = 1$
 άρα $\psi \rightarrow 6, f^{-1}(\psi) = x \rightarrow 1$

$$\rightarrow (f^{-1})'(6) = \frac{1}{5} \text{ Άρα: } \psi = \frac{x}{5} - \frac{1}{5}$$

η εξίσωση της εφαπτ.

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Να αποδειχθεί ότι :

- 1) η f αντιστρέφεται.
- 2) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγος της.

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x, x \in (0, \pi)$. Να αποδειχθεί ότι :

- 1) η f αντιστρέφεται
- 2) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγος της.

29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδειχθεί ότι :

- 3) η f αντιστρέφεται
- 4) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγος της.

Υπόλ: $f(x) = \sin x$, f $\uparrow$ στο $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ αρα αντιστρέφεται.
 $f'(x) = \cos x \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(A) = (-1, 1)$

Ισχύει: $f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in f(A) \Rightarrow$
 $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \xrightarrow{f^{-1}(x) = \psi} f'(\psi) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \xrightarrow{f'(\psi) \neq 0}$
 $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(\psi)} \xrightarrow{f'(\psi) = \cos \psi} (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos \psi} \xrightarrow{\substack{f^{-1}(x) = \psi \\ x \in f(A) = (-1, 1) \\ \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} \\ \cos \psi = \sqrt{1 - x^2}}}$
 $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$ εφόσον $u = f^{-1}(x)$ είναι
 παραγωγίσιμη διότι $f'(x) \neq 0$

Την προηγούμενη σχέση μπορούμε την γράψτε και ως
 εξής: $f(f^{-1}(\psi)) = \psi \quad \forall \psi \in f(A) \xrightarrow[\text{Προ } \psi]{\text{Παραγ. ως}}$
 $f'(f^{-1}(\psi)) \cdot (f^{-1})'(\psi) = 1 \xrightarrow{f^{-1}(\psi) = x} f'(x) \cdot (f^{-1})'(\psi) = 1$
 $\xrightarrow{f'(x) \neq 0} (f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{\sin x} \xrightarrow{\substack{\psi = \sin x \\ \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}}}$
 $(f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \psi^2}} \quad \psi \in f(A) = (-1, 1)$. Τελικά:
 $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad x \in (-1, 1)$

30. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x, x \in (0, \pi)$. Να αποδειχθεί ότι :
- η f αντιστρέφεται
 - Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγος της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.
 - σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

γ) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 4$.

δ) είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

στ) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

ζ) άγεται από το σημείο $(-1, 0)$.

2. Να βρείτε την εφαπτομένη (αν υπάρχει) των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:

α) $f(x) = \ln x$ στο $(1, 0)$

β) $f(x) = |2 - x|$ στο $(2, 0)$

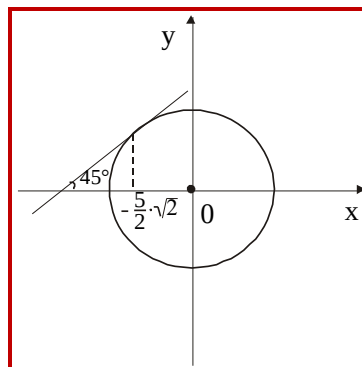
γ) $f(x) = \sqrt{x^3}$ στο $(0, 0)$

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο $(0, 0)$

ε) $f(x) = x\sqrt{x}$ στο $(0, 0)$

στ) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ στο $(-2, \frac{3}{4})$

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του παρακάτω σχήματος.



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Να βρείτε τη συνθήκη για τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$ με $a > 0$ και $x > 0$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το a , διέρχονται από το ίδιο σημείο.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να γενικευθεί για οποιοδήποτε τριώνυμο.

7. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση $f(2 + x) - f(2 - x) = -2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

8. α) Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να γράψετε τις συνθήκες ώστε η C_f και η C_g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x = x_0$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Να αποδείξετε

ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

9. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln x) = x \cdot \ln x - x, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

10. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(0, 1)$.

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Σώμα κινείται στον άξονα xx' σύμφωνα με τον νόμο $x = 5t^3 - 2t^2 + 3t - 8$. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(2, 1)$ και $B(x, 2)$ ως προς x , όταν $x=1$.

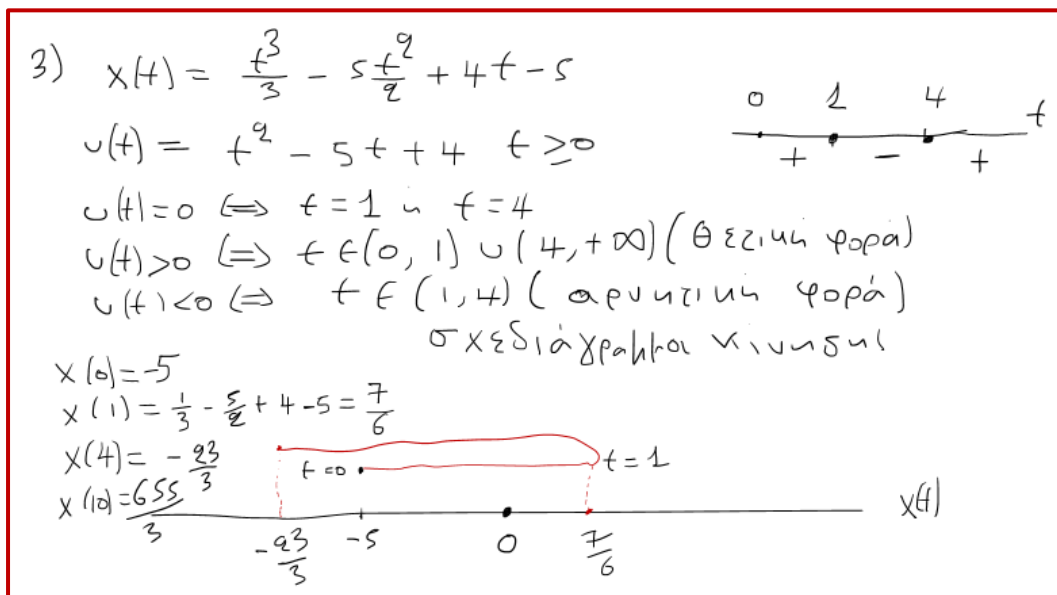
3. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t - 2$, όπου το t μετριέται σε sec και το x σε m.

- 1) Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε τυχαίο χρόνο t .
- 2) Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
- 3) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- 4) Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 sec.

$$(v(t) = t^2 - 4t + 3, v(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}),$$

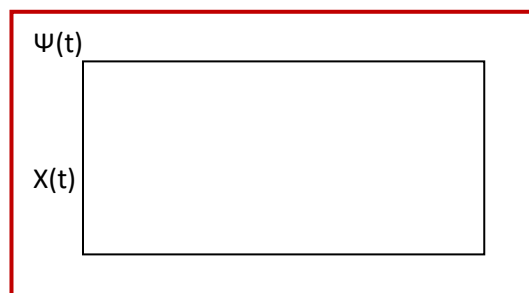
$$\begin{cases} v(t) > 0 \\ v(t) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0, 1) \cup (3, +\infty) \\ t \in (1, 3) \end{cases}, \begin{cases} x(0) = -2 \\ x(1) = -\frac{2}{3} \end{cases}, \begin{cases} x(3) = -2 \\ x(5) = \frac{14}{3} \end{cases}$$

$$S_{\text{ολ}} = |x(1) - x(0)| + |x(3) - x(1)| + |x(5) - x(3)| =)$$



4. Μία σφαιρική μπάλα χιονιού κατηφορίζοντας από την πλαγιά ενός βουνού αρχίζει να αυξάνει η ακτίνα της σύμφωνα με τον τύπο $r(t) = t^2 + 20$ (η ακτίνα δίνεται σε cm και ο χρόνος σε sec). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$ sec. ($E(t) = 4\pi r^2(t)$ και $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$)
5. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $20\text{cm}^2/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 40$ cm

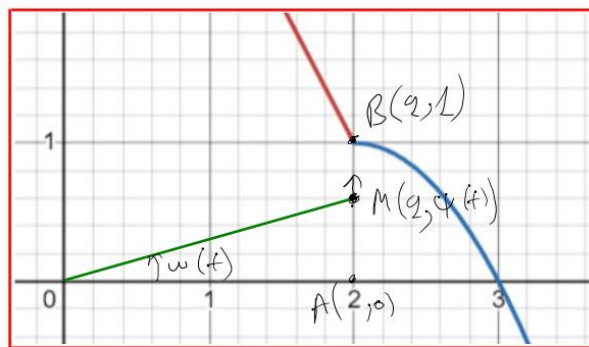
6. Έστω ορθογώνιο με πλάτος $x(t) = t^2 + 9$ και μήκος $\psi(t) = 18t + 2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, στις χρονικές στιγμές που το μήκος γίνεται διπλάσιο του πλάτους



7. Η πλευρά ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό 10 cm/min . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας και ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου τη χρονική στιγμή όπου η πλευρά του είναι $a = 5 \text{ cm}$.
8. Το εμβαδό ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $5 \text{ cm}^2/\text{min}$.
- Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς του τη χρονική στιγμή που η επιφάνεια του είναι $E = 486 \text{ cm}^2$
 - Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του, τη χρονική στιγμή που ο όγκος του είναι $V = 27 \text{ cm}^3$.
9. Το εμβαδό ενός κύκλου μειώνεται με ρυθμό $5\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$.
- Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας τη χρονική στιγμή που το μήκος του κύκλου είναι $L = 30\pi \text{ cm}$.
 - Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους του κύκλου τη χρονική στιγμή που το εμβαδό του κύκλου είναι $E = 100\pi \text{ cm}^2$
10. Ο όγκος του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο αυξάνεται με ρυθμό $100\pi \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της στάθμης του νερού αν η ακτίνα βάσης είναι $R = 10 \text{ cm}$

11. Θέμα Ιούνιος 2024

- Γ4. Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v = 0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \hat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Όταν συναντήσει το σημείο $B(2,1)$)



Θα πάρουμε μια
ηχοένδυση του προηγούμενου
σχήματος.

$$v = \psi'(t) = 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Ζητάω το $\omega'(t)$ όταν το M
ακουμπήσει στο B

$$\text{Ισχύει } v = \frac{s}{t} \Rightarrow 0,5 = \frac{\psi(t)}{t} \Rightarrow$$

$$\psi(t) = 0,5 \cdot t \quad \psi = 1 \Rightarrow 1 = 0,5 \cdot t \Rightarrow t = 2 \text{ sec}$$

$$\sin \psi(\omega(t)) = \frac{\psi(t)}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \omega'(t) = \frac{1}{2} \cdot \psi'(t) \Rightarrow$$

$$\omega'(t) = \frac{\sin^2 \psi(t)}{4} \text{ αρα}$$

$$\omega'(2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$

$$\text{οταν το } M \rightarrow B \text{ τότε}$$

$$\sin \psi(t) = \frac{OB}{OB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

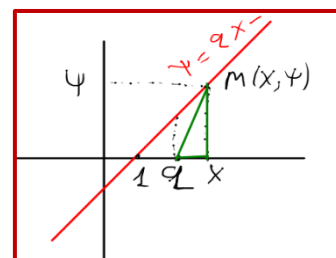
12. Θέμα Ιούνιος 2022

Γ3. Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου MKΓ, όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $X'X$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο B(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0 .

$$\Gamma_3) (MK\Gamma) = \frac{(x-2) \cdot y}{2} \quad \text{με } x > 2$$

$$\text{αρα } (MK\Gamma) = \frac{[x(t)-2] \cdot [2x(t)-2]}{2} =$$

$$(x(t)-2) \cdot (x(t)-1) = \frac{2}{x(t)} - 3x(t) + 2 = E(t)$$



$$\text{Αρα } E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t)$$

$$E'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) - 3x'(t_0) \quad \frac{x'(t_0)=2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{x(t_0)=3} \quad | 2 \cdot 6 - 6 = 6 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

13. Θέμα Σεπτέμβριος 2020

- Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 8

14. Θέμα Ιούνιος 2016 (επαναληπτικές)

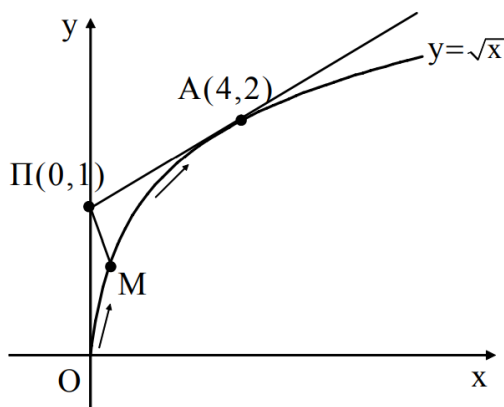
- Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 4

15. Θέμα Ιούνιος 2011

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 16t$$

Μονάδες 5

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

16. Θέμα Ιούνιος 2014

ΘΕΜΑ Δ

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

- 17.** Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = x^3 - 3x$. Η x -συντεταγμένη του σωματιδίου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2 μονάδες μήκους ανά δευτερόλεπτο.

α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων τη στιγμή που το σωματίδιο διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

β) Υπάρχει κάποια στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων είναι μηδέν; Αν ναι, να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης συμβαίνει αυτό.

- 18.** Ένα σκαφάκι κινείται με σταθερή ταχύτητα 5 m/s σε ευθεία γραμμή παράλληλα προς την ακτή. Σε ένα σημείο της ακτής υπάρχει ένας προβολέας που στρέφεται συνεχώς, ώστε να φωτίζει πάντα το σκαφάκι.

Αν το σκαφάκι απέχει αρχικά 20 μέτρα από το πλησιέστερο σημείο της ακτής, όπου βρίσκεται και ο προβολέας, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει ο προβολέας με την κάθετη στην ακτή τη στιγμή που το σκαφάκι απέχει 25 μέτρα από αυτό το σημείο.

- 19.** Ένα σωματίδιο κινείται πάνω στην καμπύλη $\psi = e^x$. Η τεταγμένη y του σωματιδίου μεταβάλλεται με ρυθμό που ισούται με το τετράγωνο της απόστασης του σωματιδίου από τον άξονα των x .
1. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του σωματιδίου τη στιγμή που το σωματίδιο διέρχεται από το σημείο $(1, e)$.
 2. Να δείξετε ότι τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο $(1, e)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταμένης είναι e -φορές μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής τη τετμημένης.
- 20.** Σώμα M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της $f(x) = x + \ln x, x > 0$ και η τετμημένη της δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 + 3t + 2$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς μια χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.