

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Στιγμιαία ταχύτητα

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S=S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t . Η συνάρτηση S ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t , η **μέση ταχύτητα** του κινητού είναι $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$.

Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0 , το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $v(t_0)$. Δηλαδή:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Παρατήρηση:

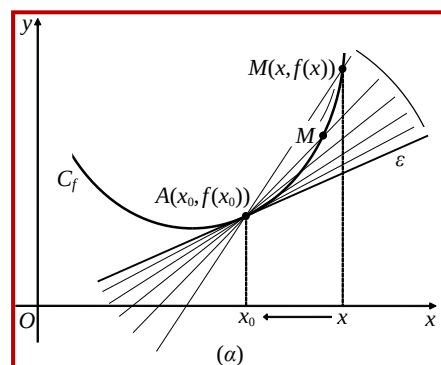
Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} > 0$, οπότε είναι $v(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} < 0$, οπότε είναι $v(t_0) \leq 0$.

Ορισμός εφαπτομένης

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της

C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας

πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .



Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$$

όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού

της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$ Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και αν θέσουμε } x = x_0 + h, \text{ τότε έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx , ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0

$$\text{με } \frac{df(x_0)}{dx} \text{ ή } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Παρατηρήσεις

- Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , τότε: Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και είναι ίσα.}$$

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι

$$v(t_0) = S'(t_0).$$

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$, οπότε η εξίσωση της ε φαπτομένης ε είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0 .

Κατακόρυφη εφαπτομένη

Ορισμός

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

$$\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad (\text{ή } -\infty)$$

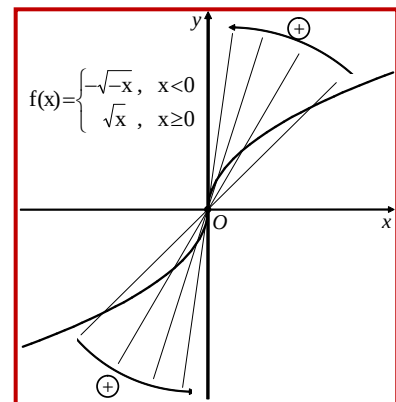
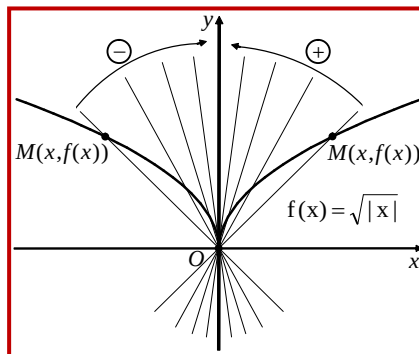
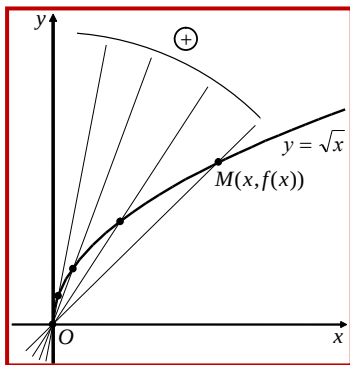
$$\beta) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

$$\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty,$$

τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

Για παράδειγμα ακολουθούν οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$ και

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$



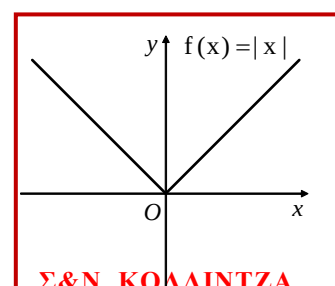
Παράγωγος και συνέχεια

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παρατηρήσεις

- Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .



- Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει, π.χ : η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$.

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμοί

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f'(x)$,

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

- Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f'' .

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

$(c)' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^v)' = vx^{v-1}$ $v \in \mathbb{N}, v > 1$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(0, +\infty)$
$(\eta \mu x)' = \sigma \nu x$	$(\sigma \nu x)' = -\eta \mu x$	$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(0, +\infty)$

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

Θεώρημα 1

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Παράγωγος γινομένου

Θεώρημα 2

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε x που ανήκει στο Δ ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Επίσης ισχύει: $(cf)'(x) = cf'(x)$

Παράγωγος πηλίκου

Θεώρημα 3

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Θεώρημα 4

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$
- Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Παρατηρήσεις

- Αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.
 Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{κανόνας της αλυσίδας}).$$
- Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

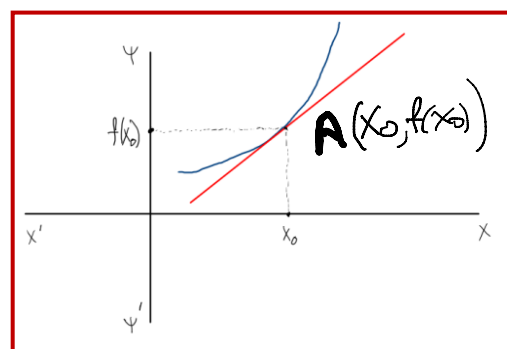
$(c)' = 0$	$(x)' = 1$
$(x^v)' = vx^{v-1} \quad v \in \mathbb{N}, v > 1$	$(x^{-v})' = -vx^{-v-1}, \quad v \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*$
$(x^k)' = kx^{k-1} \quad k \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, x > 0$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$	$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$	$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0$

Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων

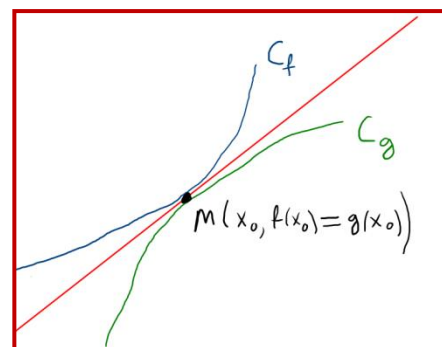
$([f(x)]^v)' = v[f(x)]^{v-1} \cdot f'(x)$ $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, f(x) > 0$ $(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$ $(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$ $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x) > 0$ $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	$(\epsilon\phi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$ $(\sigma\phi f(x))' = \frac{-1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$ $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ $(\alpha^{f(x)})' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln \alpha \cdot f'(x)$ $([f(x)]^\tau)' = \tau \cdot [f(x)]^{\tau-1} \cdot f'(x)$
---	---

Παρατηρήσεις

- Η ευθεία (ε): $y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται στη C_f , αν και μόνο αν υπάρχει x_0 στο πεδίο ορισμού της f , ώστε να ισχύει: $f'(x_0) = \lambda$ και $f(x_0) = \lambda x_0 + \beta$



- Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους $M(x_0, y_0)$, αν ισχύει: $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$



- Κοινή εφαπτομένη δυο γραφικών παραστάσεων σε μη κοινό τους σημείο.

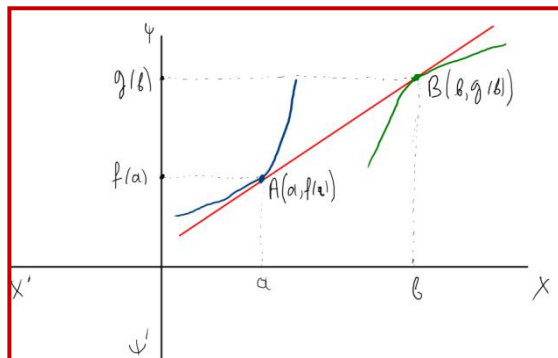
Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f είναι $\psi - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$, ενώ η εφαπτομένη της g είναι

$$\psi - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \text{ δηλαδή}$$

$$\begin{cases} \psi = f'(\alpha) \cdot x - \alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) \\ \psi = g'(\beta) \cdot x - \beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) \end{cases} \text{ . Για να}$$

παριστάνουν την ίδια ευθεία πρέπει να

$$\text{ισχύει: } \begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ \text{και} \\ -\alpha \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta \cdot g'(\beta) + g(\beta) \end{cases} \text{ . Από το παραπάνω σύστημα βρίσκω τα } \alpha, \beta.$$



Άλλος τρόπος : Για να έχουν κοινή εφαπτομένη οι γραφικές παραστάσεις των f και g αρκεί να ισχύει

$$\left\{ f'(\alpha) = g'(\beta) = \frac{g(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \text{συντελεστής διεύθυνσης } AB \right\}$$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Πρόταση:

Έστω f μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ . Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$, και η αντίστροφη f^{-1} , είναι συνεχής στο ψ_0 , τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0) = \psi_0 \in f(\Delta)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(\psi_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Απόδειξη:

$$\text{Ισχύει: } (f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(\psi_0) =$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \psi_0} \frac{f^{-1}(\psi) - f^{-1}(\psi_0)}{\psi - \psi_0} \quad \begin{matrix} \text{αν } \psi \rightarrow \psi_0 \\ f^{-1}(\psi) \rightarrow f^{-1}(\psi_0), \text{ αφού } f^{-1} \text{ συνεχής στο } \psi_0 \\ \text{άρα } x \rightarrow x_0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi_0))} \quad \text{όπου } \left\langle \begin{array}{l} f(x) = \psi \Leftrightarrow x = f^{-1}(\psi) \\ f(x_0) = \psi_0 \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(\psi_0) \end{array} \right\rangle$$

Πρόταση:

Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , γνησίως μονότονη και $f'(x) \neq 0$. Αν η f^{-1} είναι και αυτή παραγωγίσιμη για κάθε ψ που ανήκει στο $f(\Delta)$ τότε ισχύει:

$$(f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi))}$$

Απόδειξη:

$$f(f^{-1}(\psi)) = \psi \xRightarrow[\text{ως προς } \psi]{\text{παραγωγίζω}} [f(f^{-1}(\psi))] = \psi' \Rightarrow (f)'(f^{-1}(\psi)) \cdot (f^{-1})'(\psi) = 1 \xRightarrow[f'(x) \neq 0]{f^{-1}(\psi) = x} \\ (f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi))}$$

Άλλος τρόπος:

Αφού η f και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμες ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow [f^{-1}(f(x))] = x' \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \xRightarrow{f'(x) \neq 0} \\ (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \xRightarrow[x=f^{-1}(\psi)]{f(x)=\psi} (f^{-1})'(\psi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\psi))}$$

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Ορισμός

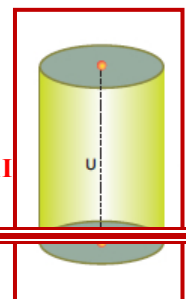
Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$** .

- ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0** . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0** .
- Αν δυο μεγέθη x, ψ συνδέονται με τη σχέση $\psi = f(x)$ και f παραγωγίσιμη ως προς x τότε:

α) Αν το ψ αυξάνεται ως προς x με ρυθμό α εννοούμε $f'(x) = \alpha > 0$.

β) Αν το ψ μειώνεται ως προς x με ρυθμό α εννοούμε $f'(x) = -\alpha$ με $\alpha > 0$.

Χρήσιμοι τύποι



➤ **Κύλινδρος**

- ✓ Το εμβαδόν E_{π} της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου ισούται με την περίμετρο της βάσης (που είναι ίση με $2\pi\rho$) επί το ύψος του κυλίνδρου. Δηλαδή $E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$ ή $E_{\pi} = 2\pi\rho \cdot \upsilon$
- ✓ Το ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$ ενός κυλίνδρου ισούται με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_{π} και τα εμβαδά E_{β} των δύο βάσεων. Δηλαδή:
- ✓ $E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta}$
- ✓ Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος, δηλαδή:

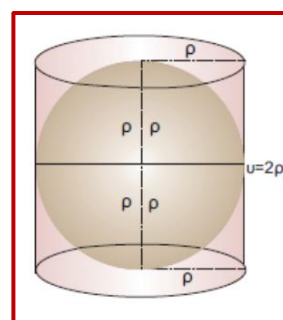
$$\text{Όγκος} = (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος}) \text{ δηλαδή } V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$$

➤ **Σφαίρα**

- ✓ Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της.
 $E = 4\pi\rho^2$

✓ **Όγκος σφαίρας**

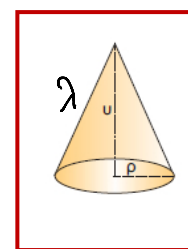
Αν έχουμε μια σφαίρα ακτίνας ρ και δύο κυλίνδρους με βάση κύκλο ακτίνας ρ και ύψος $\upsilon = 2\rho$. Γεμίζουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τη σφαίρα και αδειάζουμε το αλεύρι στους δύο κυλίνδρους τότε βλέπουμε ότι οι δύο κύλινδροι είναι τελείως γεμάτοι. Επομένως, ο τριπλάσιος όγκος σφαίρας ακτίνας ρ ισούται με τον διπλάσιο όγκο κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος $\upsilon = 2\rho$:



$$3V_{σφ} = 2V_{κ} \Rightarrow v_{σφ} = \frac{2}{3} \cdot V_{κ} = \frac{2}{3} \pi\rho^2 \cdot (2\rho) \Rightarrow V_{σφ} = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3$$

➤ **Κώνος**

- ✓ Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα, που έχει ακτίνα τη γενέτειρα λ του κώνου και μήκος τόξου το μήκος του κύκλου της βάσης του κώνου. $E_{\pi} = \frac{1}{2}(2\pi\rho) \cdot \lambda = \pi \cdot \rho \cdot \lambda$



$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} = \pi \cdot \rho \cdot \lambda + \pi\rho^2$$

- ✓ Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα κώνο και ένα κύλινδρο, έτσι ώστε να έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $\pi\rho^2\upsilon$. Αν γεμίσουμε διαδοχικά με αλεύρι τρεις φορές τον κώνο και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στον κύλινδρο, θα δούμε ότι ο κύλινδρος θα γεμίζει τελείως. $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot \upsilon$

	ΕΜΒΑΔΟ	ΟΓΚΟΣ
ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ	$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} = 2\pi\rho \cdot \upsilon + 2\pi\rho^2$	$V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$

ΣΦΑΙΡΑ	$E = 4\pi\rho^2$	$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3$
ΚΩΝΟΣ	$E_{\circ\lambda} = E_{\pi} + E_{\beta} = \pi \cdot \rho \cdot \lambda + \pi\rho^2$	$V = \frac{1}{3} \pi\rho^2 \cdot \upsilon$