

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f(x) = (2+x)^{2+x} \cdot (2-x)^{2-x}$

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
- Να δειχθεί ότι $(2+x)^{2+x} \cdot (2-x)^{2-x} \geq 16$, $\forall x \in (-2, 2)$
- Να δειχθεί ότι: $\frac{f(x)}{27} \geq (x-1) \cdot \ln 3 + 1$ (Παν.234)

Υπόψ: $A: (-2, 2)$ $f'(x) = \dots = f(x) \cdot \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$$f''(x) = f'(x) \cdot \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) + f(x) \cdot \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)' = f'(x) \cdot \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) + f(x) \cdot \frac{2-x}{2+x} \cdot \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = f'(x) \cdot \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) + \frac{f(x) \cdot 4}{(2+x)(2-x)}$$

• αν $-2 < x < 0$
 $f'(x) < 0$, $\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) < 0$
 $f(x) > 0$, $(2+x)(2-x) > 0$ $\Rightarrow f''(x) > 0$

• αν $0 < x < 2$
 $f'(x) > 0$, $\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) > 0$
 $f(x) > 0$, $(2+x)(2-x) > 0$ $\Rightarrow f''(x) > 0$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots 256$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots 256$

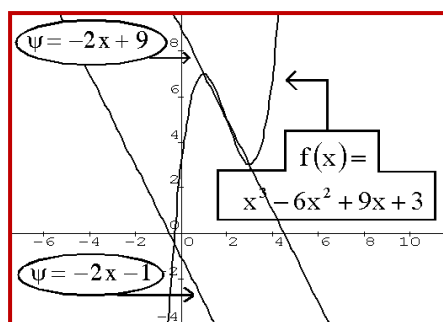
$f(x) \geq 16$

$f(1) = 27$
 $f'(1) = 27 \ln 3$
 $\psi - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow$
 $\psi - 27 = 27 \ln 3 (x-1) \Rightarrow$
 $(\epsilon): \psi = 27 \ln 3 (x-1) + 27$
 $\forall x \in A: f(x) \geq 27 \ln 3 (x-1) + 27 \Rightarrow$
 $\frac{f(x)}{27} \geq \ln 3 (x-1) + 1$

x	-2	0	2
f'		-	+
f''		+	+
f		256	256

0 ∈ A
f(0) = 16

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$. Να δειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $K(x_1, f(x_1))$ και $\Lambda(x_2, f(x_2))$, όπου x_1, x_2 οι θέσεις των ακροτάτων της, είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = -2x - 1$ και επίσης διέρχεται και από το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f . (Παν. 235)



x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	+	0	0	+
f				
		T.M	T.E	

3. Έστω $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + x - 10$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τον άξονα $\chi\chi'$ και τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης f στα σημεία καμπής της. (Παν.237)

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f''	-	0	0	-
f				
		Σ.Κ	Σ.Κ	

4. Να βρεθεί η συνάρτηση g που ικανοποιεί τις σχέσεις

- $x \cdot g'(x) \cdot \ln x - g(x) = g(x) \cdot \ln x^x, x > 1$
- $g(e) = e^e$

- Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{g(x)}{\ln x}$, ισχύει : $f'(x) = f(x)$ για $x > 1$.
- Να βρεθεί η $g(x)$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$. (Παν.238)

Υπόσ από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $g(x) = e^x \cdot \ln x, x > 1$
 Θα λύσω $g(x) = x \Leftrightarrow e^x \ln x = x$. Έστω $h(x) = e^x \ln x - x, x > 1$
 $h'(x) = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \frac{xe^x \ln x + e^x - x}{x} > 0$ γιατί $x > 1$ να $e^x > x$
 άρα $h(x)$ $\uparrow$ και h συνεχής στο $(1, +\infty)$
 $h(2) = e^2 \ln 2 - 2 > 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -1$ άρα $\exists$ μοναδική στο L^+ ώστε $h(u) = 0$ } Θ.Β $\Rightarrow$ η εξίσωση
 $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(u, 2) \subset (1, 2)$.

5. α) Να προσδιοριστεί συνάρτηση f πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

- $f(0)=1$
- η f παρουσιάζει δυο τοπικά ακρότατα στα σημεία x_1, x_2 ώστε να ισχύει:
 $x_1 + x_2 = 4$ και $x_1 \cdot x_2 = 3$ (Παν. 240)

β) Αν $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $g(f(x)) = 1$

Υπόψ: $g(0) = 1$ άρα $g(f(x)) = 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = g(0) \Leftrightarrow f(x) = 0$ γιατί g είναι "1-1" γιατί $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$
 $g'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ γιατί $x - \sqrt{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{x^2+1}$ αν $x < 0$ ισχύει
αν $x \geq 0$ έχω
 $x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$ ισχύει άρα πάντα
 Συνεπώς $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x + 3 = 0$
 Εστω $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$, $h'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

	1	3	
h'	+	-	+
h	$-\infty$	7	3

 $h(1) = 1 - 6 + 9 + 3 = 7$
 $h(3) = 27 - 54 + 27 + 3 = 3$
 Από το Σ.Τ.μ.ών βλ. ηνω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα στο $(-\infty, 1)$ μοναδική

6. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ για την οποία ισχύει

$$f(x + \psi) = \kappa \cdot f(x) \cdot f(\psi) + (1 - \kappa) \cdot [f(x) + f(\psi)], x, \psi \in \mathbb{R}, \kappa \neq 0$$

α) Αν η f είναι συνεχής στο 0, να βρεθεί το κ ώστε η f να είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

β) Αν $f'(0) = 1$ να βρεθεί η $f'(x)$ καθώς και ο τύπος της f (Παν. 241)

γ) Έστω $f(x) = e^x$. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδό. (Πα.289) $E'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1) \cdot (x+1)}{2}$

Επειδή το πεδίο τιμών της f είναι $\mathbb{R}^*$, έχουμε ότι: $f(0) = \frac{2\kappa-1}{\kappa}$

Αφού η f είναι συνεχής στο 0 , ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{2\kappa-1}{\kappa}$.

Για να είναι η f συνεχής στο τυχαίο x_0 πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \stackrel{x-x_0=h}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} f(h+x_0) = f(x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} [\kappa f(h) \cdot f(x_0) + (1-\kappa) \cdot (f(x_0) + f(h))] = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \kappa f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(h) + (1-\kappa) \cdot \left[f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \right] = f(x_0) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\kappa f(x_0) \frac{2\kappa-1}{\kappa} + (1-\kappa) \cdot \left[f(x_0) + \frac{2\kappa-1}{\kappa} \right] = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\kappa f(x_0) + \frac{(1-\kappa)(2\kappa-1)}{\kappa} = f(x_0) \Leftrightarrow (\kappa-1)f(x_0) = \frac{(\kappa-1)(2\kappa-1)}{\kappa}$$

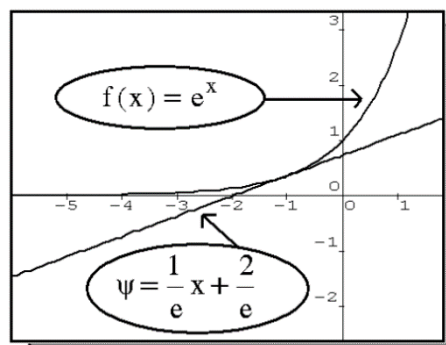
Για να ισχύει η παραπάνω σχέση για κάθε x_0 θα πρέπει να ισχύουν

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa-1=0 \\ \text{και} \\ \frac{(\kappa-1)(2\kappa-1)}{\kappa} \end{array} \right\} = 0 \Leftrightarrow \kappa=1.$$

β) για $\kappa=1$ έχω $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ να $f'(0)=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \xrightarrow{f(0)=1}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$ • $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot f(h)-f(x_0)}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x_0) \frac{f(h)-1}{h} \right] = f(x_0) \cdot f'(0) \xrightarrow{f'(0)=1} f(x_0)$ άρα για το τυχαίο x_0
 ισχύει $f'(x) = f(x) \xrightarrow[\text{νόμος διαφορίσματος}]{\text{γινώσκων}} f(x) = c \cdot e^x \xrightarrow[1=c]{f(0)=1} f(x) = e^x$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
E'	+	○	-	○	+
E		↗	↘	↗	

T.M



Έστω $M(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της $\mathcal{C}$. Τότε η εφαπτομένη της $\mathcal{C}$ στο M δίνεται από τον τύπο (ε): $\psi - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$. Η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $\left\{ \begin{matrix} A(0, e^{x_0} \cdot (1 - x_0)) \\ B(x_0 - 1, 0) \end{matrix} \right\}$. Επομένως το εμβαδόν

του τριγώνου OAB δίνεται από τον τύπο $E(x_0) = \frac{1}{2} \cdot |OA \cdot OB| =$

$$\frac{1}{2} \cdot |e^{x_0}(1 - x_0) \cdot (x_0 - 1)| \Rightarrow E(x_0) = \frac{1}{2} \cdot e^{x_0}(x_0 - 1)^2$$

$$E'(x_0) = \frac{1}{2} e^{x_0}(x_0 - 1)^2 + e^{x_0}(x_0 - 1) \Rightarrow E'(x_0) = \frac{e^{x_0} \cdot (x_0 - 1) \cdot (x_0 + 1)}{2}$$

Παρατηρώντας τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης του εμβαδού

βλέπουμε ότι στο σημείο $M(1, \frac{1}{e})$ η εφαπτομένη ευθεία της $\mathcal{C}$

θα είναι η (ε): $\psi - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(x + 1) \Leftrightarrow$ (ε): $\psi = \frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$ η οποία σχηματίζει

με τους άξονες τρίγωνο με μέγιστο εμβαδό και ίσο $\max E = E(-1) = \frac{2}{\beta}$

7. Έστω συνάρτηση f ορισμένη καταλλήλως ώστε να ισχύει: $f(x + \psi) = \frac{f(x) + f(\psi)}{1 - f(x) \cdot f(\psi)}$

- Αν η f είναι συνεχής στο 0 ναδειχθεί ότι είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.
- Αν $f'(0) = 1$, ναδειχθεί ότι $f'(x) = 1 + f^2(x)$ για όλα τα x του πεδίου ορισμού της. (Παν. 242)

8. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύουν:

- $\psi^3 f(x) - x^3 f(\psi) = (x - \psi)x^3 \psi^3$ για όλα τα x, ψ του πεδίου ορισμού.
- και $f(1) = 1$

Να βρεθεί ο τύπος της.

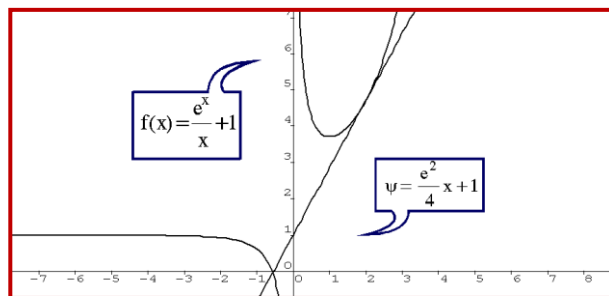
(Παν. 243) $f(x) = x^4$

Υπόθεση: έστω $x \neq \psi$ τότε έχω: $\frac{\psi^3 f(x) - x^3 f(\psi)}{x^3 \psi^3 (x - \psi)} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{f(x)}{x^3} - \frac{f(\psi)}{\psi^3}}{x - \psi} = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \psi} \frac{\frac{f(x)}{x^3} - \frac{f(\psi)}{\psi^3}}{x - \psi} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^3} \right)' = (x)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x^3} = (x + c)x^3 \xrightarrow{f(1)=1, c=0} f(x) = x^4 \text{ για } x > 0$$

9. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) + xf'(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha x} + 1$ και $f(1) = e + 1$.

- Να βρεθεί ο τύπος της f
- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να γίνει γραφική παράσταση.
- Ναδειχθεί ότι $e^x \geq x \cdot e$ για $x > 0$
- Να βρεθεί η εφαπτομένη της f στη θέση με τετμημένη 2. (Παν. 254)



Λύση: Ορίζουμε πρώτα ότι $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha x} = e^x$ (Παν. 54)
 Αρα ψάχνω τω πόσοι $f(x) + xf'(x) = e^x + 1 \Rightarrow [xf(x)]' = (e^x + x)' \Rightarrow$
 $xf(x) = e^x + x + C \xrightarrow[x=1]{f(1)=e+1} f(1) = e + 1 + C \Rightarrow C = 0$ συνεπώς
 $xf(x) = e^x + x \Rightarrow f(x) = \frac{e^x + x}{x}$ για $x \neq 0$. Τα υπόλοιπα
 ως έχουν στην άσκηση (954)

10. Αν για την συνάρτηση f ισχύουν $\begin{cases} f(\kappa) = 1 \\ f'(\kappa) = \mu \end{cases}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{\frac{f(x)}{x^3} - \frac{1}{\kappa^3}}{x - \kappa}$, $\kappa \neq 0$ (Παν. 245)

Υπόλ: $\lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{\frac{f(x)}{x^3} - \frac{1}{\kappa^3}}{x - \kappa} = \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{\frac{f(x) - \frac{1}{\kappa^3} x^3}{x^3}}{x - \kappa} = \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{f(x) - \frac{1}{\kappa^3} x^3}{x^3(x - \kappa)} = \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{f(x) - 1}{x^3(x - \kappa)} +$
 $\lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{(x - \kappa)(\frac{1}{\kappa^3} x^2 + \frac{1}{\kappa^3} x + \frac{1}{\kappa^3})}{x^3(x - \kappa)} = \frac{1}{\kappa^3} \cdot f'(\kappa) - \frac{3\kappa^2}{\kappa^3 \cdot \kappa^3} = \frac{\mu}{\kappa^3} - \frac{3}{\kappa^4} = \frac{\mu \cdot \kappa - 3}{\kappa^4}$

11. Έστω η συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f''(x) + f(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}$
- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 1$

α. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = [f(x) - \ln x]^2 + \left[f'(x) - \frac{1}{x}\right]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$,
 κατόπιν να βρεθεί ο τύπος της f . (Παν. 246)

β. Αν $f(x) = \ln x$, να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει τρίγωνο μέγιστου εμβαδού με τους αξόνες xx' και yy'

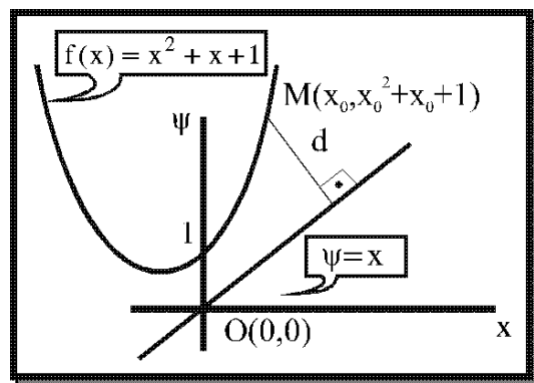
12. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη ώστε η εξίσωση $f(x) - 2022 \cdot \ln x = 0$, να έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ . Ναδειχθεί ότι:

- Η εξίσωση $f'(x) - 2022 \cdot \sin x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) και μία τουλάχιστον στο (β, γ)
- Η εξίσωση $f''(x) + 2022 \cdot \eta\mu x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, γ)

(Υποδ: Θ.Rolle για την f στα (α, β) , (β, γ) . Θ.Rolle για την f' στο ρ_1, ρ_2 .) Παν.248

13. Να βρεθεί ένα σημείο M της παραβολής $\psi = x^2 + x + 1$ που να απέχει από την πρώτη διχοτόμο της γωνίας των αξόνων ελάχιστη δυνατή απόσταση. (Παν.249.)

(Παρατηρήστε ότι στο σημείο M με την ελάχιστη απόσταση η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη της ευθείας $\psi = x$)



14. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις

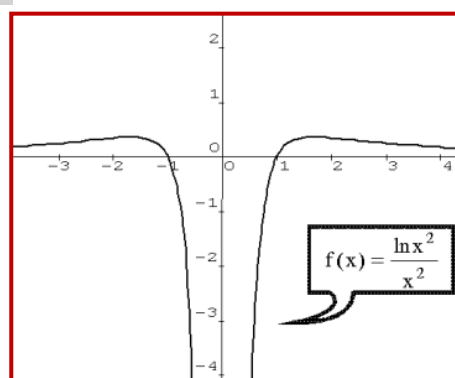
$$\begin{cases} f(x) = f'(x) + f''(x) + x^3 - x^2 - 10x + 1(1) \\ f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 2x^2 + 5, x \neq \{0, 1\}(2) \end{cases}$$

- Να βρεθεί ο τύπος της f
- Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ (Παν 251)

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$. Να βρεθούν

- Τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της, $f(A)$
- Ναδειχθεί ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Ναλυθεί η εξίσωση $\ln x^2 = \frac{x^2}{2}$ (Παν.255)

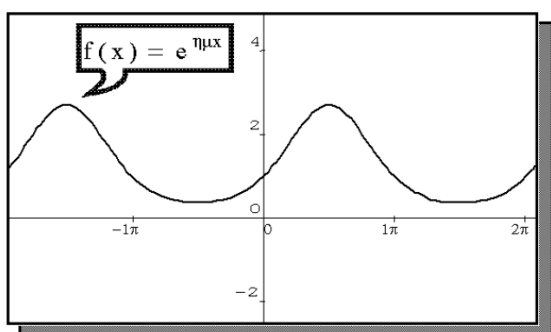
x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$2x$	-	-	+	+	+
$1 - \ln x^2$	-	○	+	+	○
f'	+	○	-	+	○
f	↗	↘	↗	↘	
		T.M		T.M	



16. Αν ισχύει $f'(x) = \sin x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $f(0) = 1$

- Να βρεθεί ο τύπος της f
- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Παν. 257)

Υπόθεση: $f'(x) = \sin x \cdot f(x) \Rightarrow f'(x) - \sin x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{G(x)} \cdot f'(x) - e^{G(x)} \cdot \sin x \cdot f(x) = 0$
 ή αλλιώς $g(x) = -\sin x$ είναι $G(x) = -\cos x$
 $[e^{-\cos x} \cdot f(x)]' = 0 \Rightarrow e^{-\cos x} \cdot f(x) = c \Rightarrow f(x) = c \cdot e^{\cos x} \xrightarrow{\substack{f(0)=1 \\ c=1}} f(x) = e^{\cos x}$



x	0	$\pi/2$	π
f'	+	0	-
f	$\nearrow$	T.M	$\searrow$

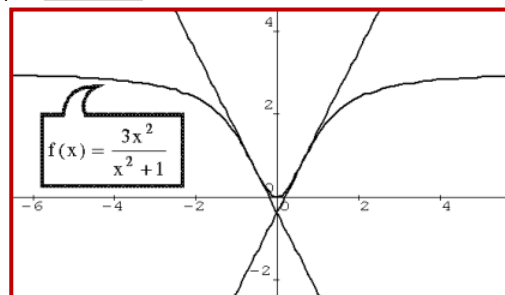
17. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης f με τύπο

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

στα σημεία καμπής της και να δείξετε ότι οι δύο εφαπτόμενες ευθείες

τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον άξονα $\psi\psi'$. (Παν.258)

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f'	-	-	0	+	+
f''	-	0	+	+	0
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		Σ.Κ	T.E	Σ.Κ	



18. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της οποίας έχει δύο

κοινά σημεία με την ασύμπτωτη της $g(x) = \frac{3x^2 - 5}{x}$. Να δειχτεί ότι υπάρχει ένα

τουλάχιστον θετικό $\xi : f'(\xi) = 3$

Υποσ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x^2} = 0$

Άρα η $\psi = 3x$ είναι ηλάρια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$.

Αφού η f έχει δύο κοινά σημεία με την $\psi = 3x$ σημαίνει ότι η $f(x) = 3x$ έχει 2 ρίζες τις ρ_1, ρ_2 και την $g(x) = f(x) - 3x$ από το Rolle (επειδή) $\Rightarrow \textcircled{\bar{z}}$

19. Έστω $f(x) = \frac{a \ln x}{\ln x + a}$, $a \in \mathbb{R}$

- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία
- Ναδειχθεί ότι $\frac{1}{1+a} < \frac{\ln \pi}{\ln \pi + a}$
- Έχει η γραφική παράσταση της f οριζόντια εφαπτομένη;

20. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3\eta\mu x}{x^2} = 5. \text{ Ναδειχθεί ότι η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν και να βρεθεί το}$$

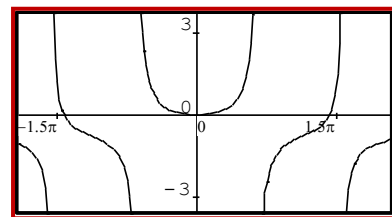
$f'(0)$ (Παν.264)

21. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-1)x(x+1)$

- Ναδειχθεί ότι η $f'(x)$ είναι άρτια συνάρτηση.
- Ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(1,0)$ και $B(-1,0)$ είναι παράλληλες.
- Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}: f''(x_0) = 0$ (Παν.277)

22. Έστω η συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\epsilon\phi x - \epsilon\phi x}{\epsilon\phi x + \epsilon\phi x}$.

- Ναδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- Ναδειχθεί ότι: $\frac{2\sqrt{3} - \pi}{2\sqrt{3} + \pi} < \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3\sqrt{3} + \pi}$



- Να υπολογιστούν τα όρια: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ \text{και} \square \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \end{array} \right\}$

(Παν.279)

23. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, $x \neq 1$

- Δείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι κάθετη στη μια ασύμπτωτη και παράλληλη στην άλλη ασύμπτωτη της C_f
- Δείξτε ότι αν $x < 0$, τότε, $e^x + x < 1$
- Δείξτε ότι αν $x > 1$, τότε, $e^{x-2} \geq x - 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'	-	-	0	+
f				

(Παν 280)

24. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι τοπικά ακρότατα της f και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ το σημείο καμπής της C_f , να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και να βρεθεί το α ώστε η απόσταση του σημείου καμπής από την αρχή των αξόνων να γίνει ελάχιστη. (Παν.290)

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f''	-	-	0	+	+	+
f						
						
		T.M	$\Sigma.K$	T.E		

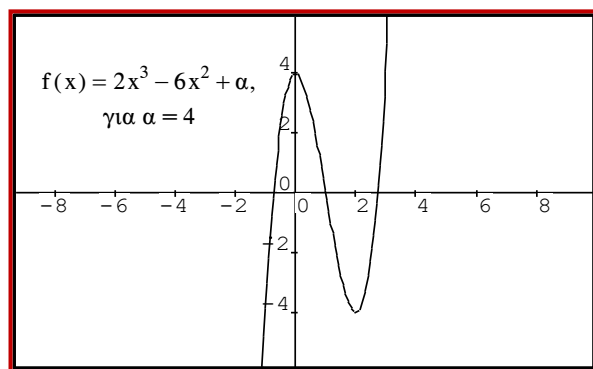
T.M

Σ.Κ

T.E

x	$-\infty$	4	$+\infty$
d'	-	0	+
d			

T.E



25. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$x^2 f'(x) + \left[2f(x) + f'(x) \right] x + f(x) + f'(x) = 1.$$

- Να βρεθεί ο τύπος της f , αν η εφαπτομένη του γραφήματος της f στο σημείο με τετμημένη 1 σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα xx' .
- Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 \ln x^2 + x^2 = (x-1) \ln(x-1) + (x-1)$ είναι αδύνατη για $x > 1$ (Παν.300)

26. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $f''(x) = e^x + 6x$
- $f(0) = 3 - e$
- $f'(0) = -2$

1. Να βρεθεί η f .

2. Να δειχθεί ότι η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής το $B(x_2, f(x_2))$ και ισχύει:

$$-\frac{1}{2} < x_2 < 0.$$

3. Ναδειχθεί ότι η f έχει ακριβώς δυο ακρότατα στις θέσεις $A(x_1, f(x_1))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$

4. Ναδειχτεί ότι : $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$.

5. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) + x - x_3 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την ρ στο $(x_3, 1)$.

6. Ναδειχθεί ότι : $\frac{f(x_2) + e - 3}{x_2} < \frac{\rho - x_3}{1 - \rho}$, όπου x_2 η θέση του σημείου καμπής, x_3 η

δεύτερη θέση του τοπικού ακρότατου και ρ η ρίζα του (ε) ερωτήματος.

Υπόψ: $f''(x) = e^x + 6x \Rightarrow (f'(x))' = (e^x + 3x^2)'$ $\xrightarrow{\Sigma.Θ.Μ.Τ} f'(x) = e^x + 3x^2 + C_1$
 όπου $f'(0) = 2$ άρα $-2 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = -3$ Άρα $f'(x) = e^x + 3x^2 - 3 \Rightarrow$
 $f'(x) = (e^x + x^3 - 3x)'$ $\xrightarrow{\Sigma.Θ.Μ.Τ} f(x) = e^x + x^3 - 3x + C_2$ όπου $f(0) = 3 - e$
 άρα $3 - e = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2 - e$. Επομένως $f(x) = e^x + x^3 - 3x + 2 - e$

β) $f''(x) = e^x + 6x$ Θα δείξω ότι η εξίσωση $e^x + 6x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $g(x) = e^x + 6x, x \in \mathbb{R}$
 $g'(x) = e^x + 6 > 0$ άρα $g(x) \uparrow, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 6x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 6x) = +\infty$ άρα το Σ των g είναι το $\mathbb{R}$ είναι
 και συνεχής) άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.
 Τώρα : $g(0) = 1 > 0, g(-\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}} - 3 = \frac{1}{\sqrt{e}} - 3 < 0$
 Άρα από Θ.Βολζανό, γίαι οι ρίζες της g , τη x_2 κοχύνει $-\frac{1}{e} < x_2 < 0$
 Επίσης ισχύει : $x < x_2 \Rightarrow g(x) < g(x_2) \Rightarrow g(x) < 0$ Άρα αλλιάζει
 $x > x_2 \Rightarrow g(x) > g(x_2) \Rightarrow g(x) > 0$ $\} \Rightarrow$ g περνούει η g
 διότι η f'' άρα το $B(x_2, f(x_2))$ είναι $\Sigma.Κ.$

γ) Ισχύει $f'(x) = e^x + 3x^2 - 3$. Θα δείξω ότι αυτή η εξίσωση $h(x) = 0$
 όπου $h(x) = e^x + 3x^2 - 3$, έχει 2 ακριβώς ρίζες και οι αλλιάζουν
 το πρόσημο της h εφαρτημέν των ριζών.

$h'(x) = e^x + 6x$. Η $h'(x) = 0$ έχει μία ρίζα την x_2 (β' ερώτημα)
 αποδεικνύοντας ότι ο h :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3x^2 - 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 3x^2 - 3) = +\infty$$

$$h(x_2) = e^{x_2} + 3x_2^2 - 3 \Rightarrow h(x_2) = -6x_2 + 3x_2^2 - 3 = 3x_2^2 - 6x_2 - 3 =$$

$$3(x_2^2 - 2x_2 - 1) \quad \Delta = 4 + 12 = 16 \text{ άρα}$$

$$\text{έχει ρίζες } 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{όπου } 1 - \sqrt{2} < -\frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$2 - 2\sqrt{2} < -1 \Leftrightarrow 3 < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$6 < 4 \Leftrightarrow 6 < 8 \text{ ισχύει}$$

$$\text{και } 1 - \sqrt{2} < -\frac{1}{e} < x_2 < 0$$

Άρα $h(x_2) < 0$. Από το $\Sigma.Τ$ της $h(x)$

β) έστω ότι η $h(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις
 x_1, x_2 και το πρόσημο της h αλλιάζει εφαρτημέν
 άρα έχει δύο ακριβώς (δύο μονοτονίας) Σ -Ακρότατα
 τα $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$

παρατηρώ ότι $h(0) = -2 < 0$
 $h(1) = e + 3 - 3 > 0$

Θ.Β. $0 < x_3 < 1$ $h(x) = e^x + 3x^2 - 3$

$h(-1) = e^{-1} > 0$
 $h(-\frac{1}{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{3}{4} - \frac{12}{4} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{9}{4} < 0$

Άρα η διαστήματα των ριζών είναι η ακόλουθη:

Θ.Β. $-1 < x_1 < -\frac{1}{e} < x_2 < 0 < x_3 < 1$
 $-\infty -1 \quad x_1 \quad -\frac{1}{e} \quad x_2 \quad 0 \quad x_3 \quad 1 \quad +\infty$

8) Έχω τον παρακείμενο πίνακα

$f(-1) = e^{-1} + (-1)^3 - 3(-1) + 2 - e \Rightarrow$
 $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 + 3 + 2 - e = 4 - e + \frac{1}{e} > 0$

$\left(\begin{aligned} 4 - e + \frac{1}{e} > 0 &\Rightarrow 4e - e^2 + 1 > 0 \Rightarrow \\ e^2 - 4e - 1 < 0 &\text{ ισχύει όταν } e < 4 \Rightarrow \\ e^2 < 4e &\Rightarrow \\ e^2 - 4e < 0 &\Rightarrow \\ e^2 - 4e - 1 < 0 \end{aligned} \right)$

$f(1) = e + 1 - 3 + 2 - e = 0$ και $x_3 < 1 \Rightarrow f(x_3) < f(1) \Rightarrow f(x_3) < 0$

Άρα $-1 < x_1 \xrightarrow{f''} f(-1) < f(x_1) \Rightarrow f(-1) > 0$
 $f(x_1) > 0$

Πίνακας:

x	$-\infty$	-1	x_1	$-\frac{1}{e}$	x_2	0	x_3	1	$+\infty$
f''		-	-	0	+	+	+	+	
f'		+	-	-	-	+	+	+	
f									

9) $f(x) + x - x_3 = 0$ έστω $\varphi(x) = f(x) + x - x_3$

$\varphi(x_3) = f(x_3) + x_3 - x_3 = f(x_3) < 0$
 $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_3 \xrightarrow{f(1)=0} 1 - x_3 > 0$

Θ.Β. φ συνεχής

η $\varphi(x) = 0$ έχει τολάχιστον μία ρίζα

$\varphi'(x) = f'(x) + 1 > 0$ γιατί από τον πίνακα βλέπω
 ότι $f'(x) > -1$ στο $(x_3, 1)$ άρα η ρίζα είναι μοναδική

$f \cup_{\sigma_0} [x_2, +\infty)$
 αρα Θ.Μ.Τ σε $[x_2, 0], [p, 1]$
 $\exists \xi_1 \in (x_2, 0)$ και $\xi_2 \in (p, 1)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(x_2)}{0 - x_2}$, $f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(p)}{1 - p}$
 $0 < x_2 < \xi_1 < \xi_2 < p \xrightarrow[f' \uparrow]{f \cup} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(0) - f(x_2)}{-x_2} < \frac{f(1) - f(p)}{1 - p}$
 $\xrightarrow[f(1)=0, f(p)=x_2-p]{f(0)=3-e} \frac{3-e-f(x_2)}{-x_2} < \frac{-(x_2-p)}{1-p} \Rightarrow \boxed{\frac{f(x_2)+e-3}{x_2} < \frac{p-x_2}{1-p}}$

27. Πανελλήνιες 2009

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Μονάδες 8

B. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{\beta - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\gamma - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Μονάδες 6

28. Πανελλήνιες 2011

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

29. Πανελλήνιες 2007

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

- γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

- δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

