

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

2.5 Θεώρημα Rolle

1. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$ και μάλιστα αυτό το ξ είναι το μέσο του διαστήματος (α, β) .
2. Να βρεθούν οι αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων όπου ορίζονται:

$$\triangleright f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x$$

$$\triangleright f_2(x) = \frac{e^x \cdot \eta\mu x - e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

$$\triangleright f_3(x) = \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$$

$$\triangleright f_4(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}$$

$$\triangleright f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

$$\triangleright f_6(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\triangleright f_7(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

$$\text{Υποδ: } F_1(x) = \ln x \cdot \eta\mu x, F_2(x) = \frac{e^x}{\eta\mu x}, F_3(x) = \frac{\eta\mu x}{x}, F_4(x) = \eta\mu(\ln x), F_5(x) = \sqrt{x^2 - 5}, F_6(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$$

$$, F_7(x) = -\frac{1}{\eta\mu x}$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις να είναι ισοδύναμη με την $g'(x) = 0$

- $f'(x) = f(x) \cdot \varepsilon \phi x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad g(x) = f(x) \cdot \sigma \upsilon \nu x$
- $f'(x) = \frac{2f(x)}{x}, x \neq 0 \quad g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$
- $f'(x) + 3x^2 f(x) = 0 \quad g(x) = e^{x^3} f(x)$
- $f'(x) - f(x) = -2xe^x \quad (\text{πολ/ζω με } e^{-x}, \quad g(x) = e^{-x} f(x) + x^2$
- $x \cdot f'(x) + 2 \cdot f(x) = 0, x \neq 0 \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με } X$
- $x \cdot f'(x) + 3 \cdot f(x) = 0, x \neq 0 \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με } X^2$

4. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Rolle για την $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ στο διάστημα $[-1,1]$ και να βρεθεί το κατάλληλο ξ .
5. Δίνεται συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = e$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1) : f'(\xi) = e^\xi$

6. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) \cdot \sigma \upsilon \nu x$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

- $g'(\xi) = 0$
- $f'(\xi) = f(\xi) \cdot \varepsilon \phi \xi$ (Θ. Rolle)

7. Έστω $f(x) = \alpha x^\gamma + \beta x^{1995} + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει: $\frac{\alpha}{\gamma+1} + \frac{\beta}{1996} + \gamma = 0$, ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ (με αρχική Παν.105)

8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και ισχύει: $e \cdot f(0) = f(1)$. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0,1) : f'(\xi) = 2\xi \cdot f(\xi)$

(αρκεί η εξίσωση $f'(x) - 2x \cdot f(x) = 0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$, η αρχική της $-2x$ είναι $-x^2$ άρα πολ/ζω με e^{-x^2} και έχω $e^{-x^2} \cdot f'(x) - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot f(x) = 0 \Rightarrow (e^{-x^2} \cdot f(x))' = 0$ μετά Θ.Rolle για την $g(x) = e^{-x^2} \cdot f(x)$ στο $(0,1)$.)

9. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 1 = 0$ έχει λύση μόνο την προφανή. (Παν.103)

10. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x \ln x - \frac{x^2}{2} - 2x + \kappa = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, +\infty)$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του κ .

Υποδ: έστω ότι έχει 2 ρίζες στο διάστημα αυτό. Τότε αν $f(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2} - 2x + \kappa$

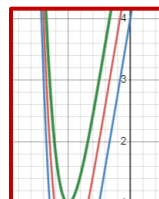
από θεώρημα Rolle $f'(x) = \ln x - x - 1 = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον

ρίζα στο $(0, +\infty)$, αυτό όμως είναι άτοπο γιατί ισχύει

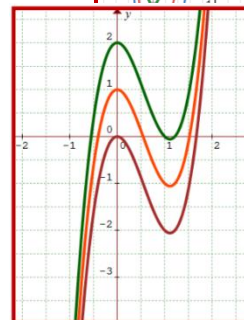
$\ln x \leq x - 1 \Rightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 \Rightarrow \ln x - x - 1 \leq -2$ στο $(0, +\infty)$

11. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 6x - \kappa = 0$ δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (Παν.104)

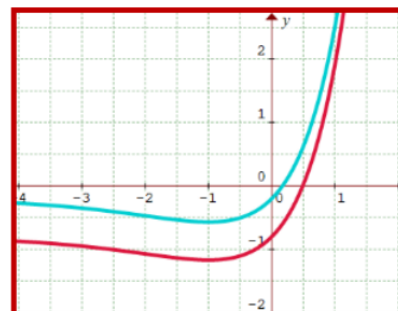
12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^6 + 6x + \kappa = 0$ $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. (Παν.107)



13. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3x^3 - 5x^2 + \log \kappa = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

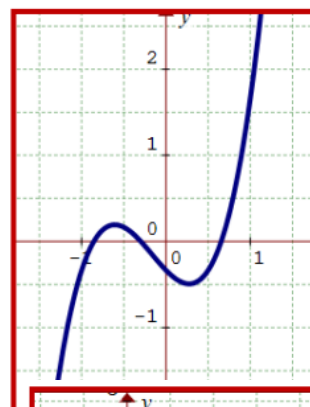


14. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $xe^x - \eta\mu\theta = 0$, $(\theta \in (0, \pi))$, ως προς x έχει μια ακριβώς λύση στο $(0,1)$ (Παν. 109)



15. Έστω $f(x) = 2x^3 + x^2 - x - \frac{1}{3}$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ και μια τουλάχιστον στο $(-1,0)$

(με Bolzano στο $(0,1)$ και με αρχική για το $(-1,0)$ Παν .110)



16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} - 2x + e$, $x > 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $(0,1)$ (Bolzano και μετά Rolle)



17. Έστω $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \geq 0 \\ \beta x + \gamma, & x < 0 \end{cases}$. Να βρεθούν τα α, β, γ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f στο $[-1, 1]$.

18. Ναδειχθεί ότι αν α, β, γ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την α τότε η εξίσωση $\alpha^x = \beta^x + \gamma^x$ έχει μοναδική λύση την $x = 2$

(Θ. Rolle για την $f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x - 1$ σε διάστημα $(2, \rho_1)$)

19. Σε έναν αγώνα δρόμου, δύο δρομείς τερματίζουν ταυτόχρονα. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία χρονική στιγμή που οι δύο αθλητές έχουν την ίδια ταχύτητα κατά την διάρκεια του αγώνα.

Υπόδ: Έστω $S_1(t), S_2(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των αθλητών. τότε $S_1(0) = S_2(0)$ και $S_1(t_c) = S_2(t_c)$ οπότε t_c : χρονός τερματισμού. Έστω $S(t) = S_1(t) - S_2(t)$ εφαρμόζω Rolle στο $[0, t_c]$ άρα $\exists t_0 \in (0, t_c) : S'(t_0) = 0 \Rightarrow S'_1(t_0) = S'_2(t_0) \Rightarrow v_1(t_0) = v_2(t_0)$

20. Δίνεται συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$

- Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \sin x_0 = x_0 \cdot \eta \mu x_0$
- Να δείξετε ότι τα σημεία τομής της εφαπτομένης της C_f , στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, με τους άξονες είναι τα $A(0, 2\sin x_0), B(2\cos x_0, 0)$ (Rolle για την $g(x) = x \sin x$)

21. Έστω η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ώστε να ισχύει : $f(\alpha) = f(\beta) = f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi) = 0$

(Θ. Rolle Παν. 128)

22. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha > 0$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) + \alpha - \ln \alpha^\alpha = f(\beta) + \beta - \ln \beta^\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \ln \xi$

Υπόδ: Θεώρημα Rolle για την $g(x) = f(x) + x - x \ln x$ (Παν. 112)

23. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(0) < f(2) < f(1)$

1. Ναδειχθεί ότι όχι «1-1»
2. Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε τουλάχιστον ένα σημείο.

Υποδ: 1) από Θ.Ε.Τ στο $[0,1]$ $\exists \xi \in (0,1): f(\xi) = f(2)$

2) από θ.Rolle στο $[\xi, 2]$ έχω το συμπέρασμα.

24. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

- $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

- και έστω $g(x) = f(x) \cdot f(x+1)$

1. Να δειχθεί ότι $f(1)=0$

2. Ναδειχθεί ότι η $g(x)$ δεν είναι «1-1»

3. Να δείχθει ότι : $\exists \xi \in (0,1): \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{f'(\xi+1)}{f(\xi+1)}$

4. Αν $f(x) = e^{x-1} - 1$, να βρεθεί αυτό το ξ .

Ynos: a) $f(\frac{1}{a}) + f(\frac{3}{a}) = 0 \Rightarrow$

- $\bullet f(\frac{1}{a}) = f(\frac{3}{a}) = 0$! zero $f(x) \neq 0$
 $x \neq 1$
- $\bullet f(\frac{1}{a}) > 0$ var $f(\frac{3}{a}) < 0$
- $\bullet f(\frac{1}{a}) < 0$ var $f(\frac{3}{a}) > 0$

} $\Rightarrow$

Από f παρατηρούμε ότι να συνεχίσει από Θ . Bolzano $y = f(x) = 0$
 έχει τρία ριζών. Αλλά στο $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Όμως $f(x) \neq 0$
 για $x \neq 1$ από αναγκαστικά η ρίζα αυτή είναι το 1.
 Συντάζει $f(1) = 0$

b)
$$\left. \begin{aligned} g(0) &= f(0) \cdot f(1) = 0 \\ g(1) &= f(1) \cdot f(2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 \neq 0 \text{ o.h.w.s } g(1) = g(0)$$

also $g(x) = 0 \forall x \in \mathbb{Z}_3$

8) $\left. \begin{aligned} &\bullet g \text{ συνεχής στο } [0,1] \\ &\bullet g \text{ παραγ στο } (0,1) \\ &\mu \in g'(x) = \frac{f'(x)f(x+1) + f(x) \cdot f'(x+1)}{f(x) \cdot f'(x+1)} \\ &\bullet g(0) = g(1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Θ. Rolle} \\ &\implies \exists \xi \in (0,1): g'(\xi) = 0 \\ &\implies f'(\xi) \cdot f(\xi+1) = -f(\xi) \cdot f'(\xi+1) \\ &\implies \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = - \frac{f'(\xi+1)}{f(\xi+1)} \quad (1) \end{aligned}$

$$f(z) \neq 0, f(z+1) \neq 0 \text{ and uniformly, } z$$

8) $f(x) = e^{x-1} - 1$, $f'(x) = e^{x-1}$, $f'(3) = e^{3-1} = e^2$, $f'(7+1) = e^{7+1-1} = e^7$
 Area ① $\Rightarrow \frac{e^{7+1} - e^{3+1}}{e^{3+1} - e^{3-1}} = -\frac{e^8 - e^4}{e^4 - e^2} \Leftrightarrow \frac{e^8 - e^4}{e^4 - e^2} = -e^4 + e^2 \Leftrightarrow$

$$2e^{z-1} \cdot e^z = e^z + e^{z-1} \Leftrightarrow 2e^z = \frac{e^z}{e^{z-1}} + 1 \Leftrightarrow 2e^z = e + 1 \Leftrightarrow e^z = \frac{e+1}{2} \Leftrightarrow z = \ln \frac{e+1}{2}$$

25. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2- φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

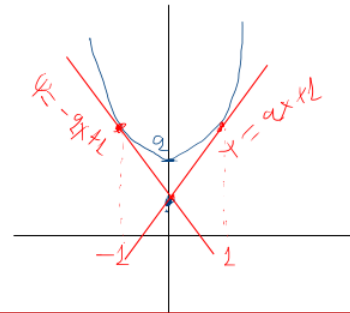
- $f(0) > 1$
 - $f'(1) > f(1) - 1$
1. Ναδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται τουλάχιστον μια εφαπτομένη που διέρχεται από το $A(0,1)$.
 2. Αν περιορίσω την f στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f''(x) \neq 0$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη αυτή είναι μοναδική.
 3. Αν $f(x) = x^2 + 2$, x πραγματικός αριθμός, να βρεθούν οι εφαπτόμενες αυτές.

Υπόσ: α) Έστω $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη.
 Η εξίσωσή της είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $\xrightarrow[\text{το } A(0,1) \text{ άρα}]{\text{διέρχεται από}} 1 - f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - 0)$
 $f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) + 1 = 0$ ①
 Θα δείξω ότι $\exists$ τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιείται η ①
 Πράγματι, έστω $g(x) = f'(x) \cdot x - f(x) + 1$
 • $g(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ γιατί η f είναι 2-ψ-ής παραγ/μη άρα η $f'(x)$ συνεχής και η $g(x)$ συνεχής σαν ηράτεις συνεχών συνάρτησεων.
 • $g(0) = f'(0) + 1 < 0$ (υπόσ)
 • $g(1) = f'(1) - f(1) + 1 > 0$ (υπόσ)
 Άρα από Θ.Βολζανο $\exists x_0 \in (0,1)$:
 $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) + 1 = 0$
 Άρα η C_f δέχεται τουλάχιστον μία εφαπτομένη η οποία διέρχεται από το $A(0,1)$

β) Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Θα δείξω ότι η $g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot x - f(x) + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα την x_0 . Έστω ότι έχει 2, τις $x_0 \in (0,1)$ και την $x_1 \in [0, +\infty)$ τότε ισχύει $g(x_0) = g(x_1)$ Άρα από Θ-Rolle έχω ότι $\exists \xi \in (x_0, x_1)$ ή (x_1, x_0) : $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) \cdot \xi + f'(\xi) - f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) \cdot \xi = 0$ άρα $\xi \neq 0$ άρα $\xi \in (x_1, x_0)$ και $f''(\xi) \neq 0$ άρα $\xi = 0$.
 Άρα η ρίζα x_0 της $g(x) = 0$ είναι μοναδική.

8) $f(x) = x^2 + 2$, $f'(x) = 2x$
 Η εξίσωση των εφαπτομένων είναι $\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$
 $\psi - (x_0^2 + 2) = 2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow \psi - x_0^2 - 2 = 2x_0x - 2x_0^2 \Leftrightarrow$
 $\psi + x_0^2 - 2 = 2x_0x$ όπου $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.
 Οπως $A(0,1)$ ανήκει στην ευθεία οπότε: $1 + x_0^2 - 2 = 2x_0 \cdot 0 \Leftrightarrow$
 $x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$ Άρα τα σημεία επαφής είναι τα
 $B(1,3)$, $C(-1,3)$ να οι εφαπτομένες είναι οι:

(ε₁): $\psi + 1 - 2 = 2x \Leftrightarrow \psi = 2x + 1$
 (ε₂): $\psi + 1 - 2 = -2x \Leftrightarrow \psi = -2x + 1$



26. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $f(x^2 + 1) = e^x \cdot f(x)$.

1. Ναδειχθεί ότι η $f(x)$ δεν είναι «1-1»
2. Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την $f(x)$ στο $[0,1]$
3. Να δείξετε ότι $\exists \xi \in (0,1): \frac{f'(\xi^2 + 1)}{e^\xi} = \frac{f(\xi)}{2\xi}$

27. Έστω $f, g: [1,10] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν:

- f παραγωγίσιμη στο $[1,10]$.
- $f(x) \neq 0$ για όλα τα x του $[1,10]$.
- $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+1}{x}$ για όλα τα x του $[1,10]$.
- $g(x) = \frac{e \cdot x}{f(x)}$ για όλα τα x του $[1,10]$.

Ναδειχθεί ότι:

1. $g(x) = g(x+1)$
2. Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 9 αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_9 \in (1,10)$, ώστε

$$\frac{\xi_i \cdot f'(\xi_i)}{f(\xi_i)} = 1, i = 1 \text{ έως } 9.$$

Υποδ: β) θεωρήμα Rolle για την $g(x)$ στα διαστήματα $(1,2), (2,3), \dots, (9,10)$.

28. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι :

1. $\exists \xi_1 \in (\alpha, \beta): f'(\xi_1) + f(\xi_1) = 0$
2. $\exists \xi_2 \in (\alpha, \beta): f'(\xi_2) - f(\xi_2) = 0$
3. $\exists \xi_3 \in (\alpha, \beta): f'(\xi_3) + \ln \xi_3 \cdot f(\xi_3) = 0$

Υποδ: 1) θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^x \cdot f(x)$ στο (α, β) .

2) θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^{-x} \cdot f(x)$ στο (α, β) .

3) θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ στο (α, β) .

29. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1)=f(e)=0$. Να δείξετε ότι :

1. $\exists \xi_1 \in (1, e): f'(\xi_1) + e f(\xi_1) = 0$
2. $\exists \xi_2 \in (1, e): f'(\xi_2) = \xi_2 f(\xi_2) = 0$
3. $\exists \xi_3 \in (1, e): f'(\xi_3) + \ln \xi_3 \cdot f(\xi_3) = 0$
4. $\exists \xi_4 \in (1, e): f'(\xi_4) + f'(\xi_4) \cdot f(\xi_4) = 0$
5. $\exists \xi_5 \in (1, e): e \cdot f'(\xi_5) + f(\xi_5) = 0$

Υποδ: 1) θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^{e-x} \cdot f(x)$ στο $(1, e)$.

2) θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot f(x)$ στο $(1, e)$.

3) θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^{x \cdot \ln x - x} \cdot f(x)$ στο $(1, e)$.

4) θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^{f(x)} \cdot f(x)$ στο $(1, e)$.

5) ισχύει: $e \cdot f'(\xi_5) + f(\xi_5) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_5) + \frac{1}{e} \cdot f(\xi_5) = 0$

θεώρημα Rolle για την $g(x) = e^{\frac{1}{e} \cdot x} \cdot f(x)$ στο $(1, e)$.

30. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\kappa, \lambda]$, ώστε $\frac{f(\kappa) - f(\lambda)}{e^\kappa - e^\lambda} = 1$. Να δειχθεί ότι

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\kappa, \lambda)$ ώστε $f'(\xi) = e^\xi$.

(Παν.118)

Το Θεώρημα μέσης τιμής

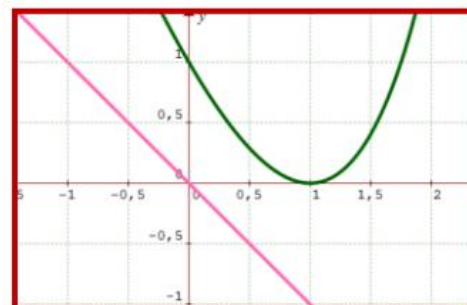
31. Έστω $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ με $a+b+c = 1$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα xx' .

(Θ.Μ.Τ)

32. Έστω η συνάρτηση $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στη χορδή που περνάει από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(3,9)$

(Θ.Μ.Τ)

33. Έστω $f(x) = e^x - e \cdot x$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στη $\psi = -x$.



34. Να αποδείξετε ότι $e^x < \frac{e^x - e^\psi}{x - \psi} < e^\psi$ για $x < \psi$

(για την $f(t) = e^t$ Θ.Μ.Τ στο $[x, \psi]$)

35. Να αποδείξετε ότι $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \leq |\alpha - \beta|$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(για την $f(x) = \eta\mu x$ Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$)

36. Αν $1 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{2\sqrt{\alpha}} < \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} < \frac{\alpha - \beta}{2\sqrt{\beta}}$

(για την $f(x) = \sqrt{x}$ Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$)

37. Να δείξετε ότι $\frac{2}{7} < \ln \frac{7}{5} < \frac{2}{5}$

Υποδ: Θ.Μ.Τ για την $f(x) = \ln x$ στο $[5, 7]$

38. Αν $0 < \beta < \alpha$, να δείξετε ότι

$$\triangleright \frac{\alpha - \beta}{\alpha} < \ln \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha - \beta}{\beta} \quad (\text{για την } f(x) = \ln x \text{ Θ.Μ.Τ στο } [\beta, \alpha])$$

$\triangleright$

$$\triangleright \ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\sqrt{\beta}} < 2(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \quad (\text{εφαρμογή για } \alpha = \sqrt{\alpha} \text{ και } \beta = \sqrt{\beta})$$

39. Να δείξετε ότι ισχύει: $\sqrt[n]{\alpha+1} - \sqrt[n]{\alpha} < 1$ για $n \geq 2$ (φυσικός) και $\alpha > 1$

Υποδ: Θ.Μ.Τ για την $f(x) = \sqrt[n]{x}$ στο $(\alpha, \alpha+1)$, αρκεί το $f'(\xi) = \frac{1}{n} \cdot \xi^{\frac{1}{n}-1} < 1$, που ισχύει. (Παν:101)

40. Να δείξετε ότι:

$$1. \text{ για κάθε } x > 0 \text{ ισχύει: } 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$$

2. για κάθε $x < 0$ ισχύει: $e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Υποδ: α) εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την $f(x) = e^x$ στο $(0, x)$.

β) εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την $f(x) = e^x$ στο $(x, 0)$.

γ) εφαρμόζω κριτήριο παρεμβολής και βρίσκω

τα πλευρικά όρια τα οποία είναι ίσα, υπενθυμίζω ότι το κριτήριο

παρεμβολής ισχύει και με γνήσιο στην ανίσωση.

(Απορία στο Κριτήριο Παρεμβολής - mathematica.gr)

41. Να δείξετε ότι

➤ Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα

➤ η εξίσωση $3^x + 5^x = 8^x$ έχει ως μοναδική λύση την προφανή.

➤ Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει: $(3^{1995-\alpha} + 5^{1995-\alpha}) \cdot 8^{1+\alpha} < 3^{1996} + 5^{1996}$

(Διαιρούμε και τα δύο μέλη με 8^{1996})

42. Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^x$ με $z \geq 1$

➤ Να εφαρμοστεί το Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $(\alpha - 1, \alpha)$ και $(\alpha + 1, \alpha + 2)$

➤ Αν $\alpha \geq 1$ να λυθεί η εξίσωση $\alpha^x + (\alpha + 1)^x = (\alpha + 2)^x + (\alpha - 1)^x$ ως προς x .

43. Έστω η εξίσωση $x^{2021} + 2^{2021} + 3^{2021} = (x + 5)^{2021}$

➤ Να βρεθούν οι προφανείς λύσεις της.

➤ Με τη βοήθεια του Θ. Rolle να δείξετε ότι είναι μοναδικές.

Προφανείς λύσεις -2, -3 (Παν. 125)

44. Έστω $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x) = \frac{e^x}{x+1}$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}_+$. Να δειχθεί ότι $f(\kappa) - f(\lambda) \leq \kappa - \lambda$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}_+$

(Θ.Μ.Τ στο (κ, λ) και $e^x \geq x + 1$)

45. Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = f(1)$ και $|f''(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$

➤ Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$

➤ Να δειχθεί ότι για το ξ αυτό ισχύει $|f'(x)| \leq \xi - x$ για κάθε $x \in (0, \xi)$

(Θ. Rolle για την f στο $(0, 1)$ και Θ.Μ.Τ για την f' στο (x, ξ) Παν 134).

46. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$. Αν ισχύουν $\left\langle \begin{array}{l} f(1) = \kappa \\ |f'(x)| \leq \lambda \text{ για κάθε } x \in (1,2) \end{array} \right\rangle$

ναδειχθεί ότι $\kappa - \lambda < f(x) < \kappa + \lambda$ για κάθε $x \in (1,2]$, $\kappa, \lambda > 0$

(Θ.Μ.Τ στο $(1, x)$ με $x \in (1,2]$ Παν 135)

47. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1) = f(2) = 0$

- Να χωριστεί το διάστημα $[0,2]$ στα τέσσερα.
- Να εφαρμοστεί το Θ.Μ.Τ σε καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα.
- Ναδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (0,2)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) \cdot f'(\xi_3) \cdot f'(\xi_4) = \left[4 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) \right]^2$$

48. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Ναδειχθεί ότι :

- Υπάρχουν τουλάχιστον από ένα $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$
- Αν επιπλέον ισχύει: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 0$. Τότε να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f''(\xi) > 0$

(Θ.Μ.Τ στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ και Θ.Μ.Τ στο (ξ_1, ξ_2) Παν. 137)

49. Έστω $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ώστε:

- $f(0) - f(1) = -3$
- $f'(x) \neq 3, \forall x \in (0,1)$

Να δείξετε ότι f όχι συνεχής στο $[0,1]$

Υποδ: έστω ότι f συνεχής στο $[0,1]$ τότε κάνοντας χρήση του Θ.Μ.Τ καταλήγω σε άτοπο.

50. Έστω $f : [1,16] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[1,16]$ ώστε:

- $f(1) \cdot f(4) \cdot f(16) = 64$
- $f(x) \neq 0, \forall x \in [2,16]$

Να δείξετε ότι:

1. $f(x) > 0$ στο $[1,16]$.
2. $\exists \xi_1 \in [1,16]: f(\xi_1) = 4$
3. $\exists \xi_2 \in [1,16]: f(\xi_2) = \xi_2$
4. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την $g(x) = (f(x) - 4) \cdot (f(x) - x)$ στο (ξ_1, ξ_2) και ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot (x + 4 - 2f(x)) = 4 - f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ξ_1, ξ_2) .

Υπόσ. 1) Έστω ότι $\exists x_1 \in [1,16] : f(x_1) < 0$ τότε από την σχέση $f(1) \cdot f(4) \cdot f(16) = 64$ καταλαβαίνω ότι $\exists x_2$ που $x_2 = 1$ ή 4 ή 16 ώστε $f(x_2) > 0$ από το Bolzano ή $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο (x_1, x_2) άρα από υπόθεση άρα $f(x) > 0$ στο $[1,16]$

2) Έστω ότι $f(x) \neq 4 \forall x \in [1,16]$ άρα $f(x) - 4 \neq 0$ άρα διατηρεί πρόσημο άρα $f(x) > 4$ ή $f(x) < 4$ δηλαδή $f(1) > 4, f(4) > 4, f(16) > 4 \Rightarrow f(1) \cdot f(4) \cdot f(16) > 64$ άτοπο ή $f(1) < 4, f(4) < 4, f(16) < 4 \Rightarrow f(1) \cdot f(4) \cdot f(16) < 64$ άτοπο άρα $\exists x_1 \in [1,16] : f(x_1) = 4$

Δύο πρόβ. f συνεχής στο $[1,16]$ άρα $\exists m, M$ ώστε $m \leq f(x) \leq M$

από $\left. \begin{matrix} m \leq f(1) \leq M \\ m \leq f(4) \leq M \\ m \leq f(16) \leq M \end{matrix} \right\} \Rightarrow m^3 \leq f(1) \cdot f(4) \cdot f(16) \leq M^3 \Rightarrow \sqrt[3]{m^3} \leq \sqrt[3]{64} \leq \sqrt[3]{M^3} \Rightarrow m \leq 4 \leq M \Rightarrow \text{Θ.Ε.Τ. το } x_0 \text{ υπάρχει}$

3) Έστω ότι $f(x) \neq x \forall x \in [1,16]$ δηλαδή $f(x) - x \neq 0$ άρα η $f(x) - x$ διατηρεί πρόσημο δηλαδή $f(x) - x > 0$ ή $f(x) - x < 0$ δηλαδή $f(x) > x$ ή $f(x) < x \Rightarrow \left(\begin{matrix} f(1) > 1 \\ f(4) > 4 \\ f(16) > 16 \end{matrix} \right) \text{ ή } \left(\begin{matrix} f(1) < 1 \\ f(4) < 4 \\ f(16) < 16 \end{matrix} \right) \Rightarrow \text{ατοπο (+)}$

Παρατήρηση: Είναι βέβαια να μην ναυγίς $f(x) \neq x \Rightarrow f(1) \neq 1$
γιατί μπορούμε: $\left. \begin{matrix} f(4) \neq 4 \\ f(16) \neq 16 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 64 \neq 64$ άτοπο
 $f(1) = 16$ δηλαδή ίσως να ισχύει $f(x) \neq x$
 $f(4) = 2$ όπως άτοπο δεν βγαίνει
 $f(16) = 2$ όπως άτοπο δεν βγαίνει
Είναι βέβαια να μην/μν κατα μήν οζαυεχω $(\neq)$

$64 > 64$ ή $64 < 64$ άτοπο

4) $g(x) = (f(x) - 4)(f(x) - x)$

$\left. \begin{matrix} \bullet g(\xi_1) = 0 \text{ γιατί } f(\xi_1) = 4 \\ \bullet g(\xi_2) = 0 \text{ γιατί } f(\xi_2) = \xi_2 \\ \bullet g \text{ παραγ. στο } [1,16] \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Θ.Ρolle} \text{ ή έπίσωση } g'(x) = 0 \Rightarrow$

$$f'(x) \cdot (f(x) - x) + (f(x) - 4) \cdot (f'(x) - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x)(f(x) - x) + f'(x) \cdot f(x) - f(x) - 4f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(2f(x) - x - 4) = f(x) - 4 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(x + 4 - 2f(x)) = 4 - f(x) \text{ έχει μια ρίζα στο } (\xi_1, \xi_2)$$

51. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε:

- $f(0) = 0$

- $f(1)=1$

Να δείξετε ότι:

1. $\exists \xi \in (0,1): f(\xi) = -\xi^2 + 1$
2. $\exists x_1, x_2 \in (0,1): f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \xi^2 + \xi$, όπου ξ , το ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Υποδ: α) Bolzano στο $(0,1)$

β) Θ.Μ.Τ στα $(0,\xi), (\xi,1)$

52. Έστω $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[0,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,6)$ με $f(0)=f(6)$.

Να δείξετε ότι $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,6): f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$

Υποδ: Θ.Μ.Τ στα $(0,2), (2,4), (4,6)$ και μετά προσθέτω κατά μέλη.

53. Έστω $f: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε:

- $f(x)$ 2- φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$.
- $f(1) + f(3) = f(2)$

Να δείξετε ότι:

1. $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1,3): f'(\xi_2) = f'(\xi_1) - f(2)$, με $\xi_1 < \xi_2$.
2. $\exists x_0 \in (1,3):$ το $f''(x_0)$ να είναι ετερόσημο με το $f(2)$.

Υποδ: α) από Θ.Μ.Τ για την $f(x)$ στο $(1,2)$ υπάρχει $\xi_1 \in (1,2): f'(\xi_1) = f(2) - f(1) \stackrel{\text{υπόθεση}}{=} f(3)$,

από Θ.Μ.Τ στο $(2,3)$ υπάρχει $\xi_2 \in (2,3): f'(\xi_2) = f(3) - f(2)$.

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχω το ζητούμενο.

β) από Θ.Μ.Τ για την $f'(x)$ στο (ξ_1, ξ_2) υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2): f''(x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \Rightarrow$

$$f''(x_0) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \Rightarrow f''(x_0) = \frac{f'(\xi_1) - f'(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \stackrel{\alpha) \text{ ερώτημα}}{\Rightarrow}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(2)}{\xi_1 - \xi_2} \text{ και ισχύει ότι } \xi_1 - \xi_2 < 0, \text{ άρα τα } f''(x_0), f(2) \text{ είναι ετερόσημα.}$$

54. Έστω f, g συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b) με

- $g(a) \neq g(b)$
- $g'(x) \neq 0$ για όλα τα x στο (a,b)

Να δείξετε ότι :

$$\alpha. \exists \xi \in (\alpha, \beta): \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(Θεώρημα μέσης τιμής Cauchy)

$$\beta. \text{ Αν } 0 < \alpha < \beta \text{ τότε } \exists \eta \in (\alpha, \beta): \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha}}{\beta^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2 \cdot \eta^2}$$

Υποδ: α) θεώρημα Rolle για την $h(x) = f(x) \cdot [g(\beta) - g(\alpha)] - g(x) \cdot [f(\beta) - f(\alpha)]$ στο (α, β)

β) εφαρμογή του θεωρήματος Cauchy για $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2$ στο $[\alpha, \beta]$

55. Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ώστε:

- f' γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$
- $f(0) = 2$
- $f'(1) = 3$

Να δείξετε ότι $f(x) \leq 3x + 2$ για κάθε x στο $[0,1]$

Υποδ: για $x = 0$ ισχύει σαν ισότητα, αν $x \in (0,1]$ από Θ.Μ.Τ για την f στο $(0,x)$ έχω ότι

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 2}{x}, \text{ όμως } \xi < 1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(1) \Rightarrow f'(\xi) < 3 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - 2}{x} < 3 \Rightarrow f(x) < 3x + 2. \text{ Άρα τελικά ισχύει } f(x) \leq 3x + 2 \text{ για κάθε } x \text{ στο } [0,1]$$

56. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και $f(1) = 2$

Να δείξετε ότι:

1. $\exists \xi \in (0,1): f(\xi) = 1$
2. $\exists x_1, x_2 \in (0,1): \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 1$

Υποδ: 1) Θ.Ε.Τ για την f στο $[0,1]$

2) Θ.Μ.Τ για την f στα $(0, \xi), (\xi, 1)$

57. Έστω $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο ώστε να ισχύει:

- $f(0) < 1$
- $f(1) = 1$
- $f(2) < 1$

Να δείξετε ότι $\exists x_0 \in (0,2): f'(x_0) = 0$

Υποδ: Θ.Μ.Τ στα $(0,1)$ και $(1,2)$ και μετά θεώρημα Bolzano για την f' στο (ξ_1, ξ_2) , όπου ξ_1, ξ_2 αυτά από τα Θ.Μ.Τ

58. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f(0) = f(2) = 0$ και στο $x=1$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

1. Να δείξετε ότι: $\exists \xi_1 \in (0,1): f'(\xi_1) > 0$
2. Να δείξετε ότι: $\exists \xi_2 \in (1,2): f'(\xi_2) < 0$
3. Να δείξετε ότι: $\exists x_0 \in (0,2): f'(x_0) = 0$

Υποδ: 1. Θ.Μ.Τ στο $(0,1)$

59. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και $f(7)=22$.

1. Να δείξετε ότι: $\exists x_1, x_2, x_3 \in (1,7): f'(x_1) + 2 \cdot f'(x_2) + 3 \cdot f'(x_3) = 20$

2. Να δείξετε ότι: $\exists x_1, x_2, x_3 \in (1,7): \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} + \frac{3}{f'(x_3)} = \frac{9}{5}$

Υποδ: 1. Θα κόψω το διάστημα $(1,7)$ στα 6 κομμάτια $\frac{7-1}{6} = 1 = d$, θεωρώ τα σημεία $\gamma = 1+d = 2$ και

$\delta = \gamma + 2d = 4$ και εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στα $(1,2)$, $(2,4)$ και $(4,7)$, μετά προσθέτω κατά μέλη και καταλήγω στο συμπέρασμα.

2. Θα κόψω το διάστημα $(f(1), f(7))$ σε 6 κομμάτια $\frac{f(7)-f(1)}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = d$ και θεωρώ τα σημεία

$\gamma, \delta \in (1,7)$ ώστε $f(\gamma) = f(1) + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$ και $f(\delta) = f(\gamma) + 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 12$. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ

στα διαστήματα $(1, \gamma)$, (γ, δ) και $(\delta, 7)$, σχηματίζω το άθροισμα $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} + \frac{3}{f'(x_3)}$ και καταλήγω στο συμπέρασμα.

60. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με τη πρώτη παράγωγο της f να είναι συνεχής και ώστε να ισχύει:

$$\triangleright 2f'(2) + f'(1) = f(1) + f(2)$$

$$\triangleright 3g(2) = 2g(3), \text{ να δείξετε ότι:}$$

$$1. \exists \xi \in \mathbb{R}: g'(\xi) = \frac{g(2)}{2}$$

2. Υπάρχει ένα σημείο A της C_f με τετμημένη $x_1 \in [1,2]$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο αυτό να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3. Υπάρχει ένα σημείο B της C_g με τετμημένη $x_2 \in (2,3)$ ώστε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο αυτό να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Υπόδ: 1) Από Θ.Μ.Τ για το g στο $(2,3)$: $\exists \xi \in (2,3): g'(\xi) = \frac{g(3)-g(2)}{3-2} \Rightarrow$
 $g'(\xi) = \frac{g(3)-g(2)}{1} \xrightarrow{g(3)=\frac{3}{2}g(2)} g'(\xi) = \frac{\frac{3}{2}g(2)-g(2)}{1} \Rightarrow g'(\xi) = \frac{g(2)}{2}$

2) Έστω $A(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής της Γ με την εφαπτομένη (ε) τότε (ε): $y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \xrightarrow{O(0,0) \in (ε)}$

$$0 - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (-x_1) \Rightarrow f(x_1) = x_1 \cdot f'(x_1) \quad (1)$$

Θα δείξω ότι η (1) έχει λύση στο $[1, 2]$ - παραχází

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - x f'(x)$$

• $h(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$

$$\left. \begin{aligned} & \bullet h(1) = f(1) - 1 \cdot f'(1) \\ & \bullet h(2) = f(2) - 2 f'(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(1) \cdot h(2) = - (f(1) - f'(1))^2 \leq 0$$

• Αν $h(1) \cdot h(2) = 0 \Rightarrow f(1) - f'(1) = 0 \Rightarrow h(1) = 0$ άρα $x_1 = 1$ ή $x_1 = 2$ αν $h(2) = 0$

• Αν $h(1) \cdot h(2) < 0 \xrightarrow{GB} \exists x_1 \in (1, 2): h(x_1) = 0$ άρα τζάβινα

$$\exists x_1 \in [1, 2]: h(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = x_1 f'(x_1)$$

Άρα $\exists$ σημείο $A(x_1, f(x_1))$ με $x_1 \in [1, 2]$ ώστε η εφαπτομένη της Γ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3) Έστω $B(x_2, g(x_2))$ το σημείο επαφής της Γ με την εφαπτομένη (ε) τότε (ε): $y - g(x_2) = g'(x_2) \cdot (x - x_2) \xrightarrow{O(0,0) \in (ε)}$

$-g(x_2) = -x_2 g'(x_2) \Rightarrow x_2 g'(x_2) - g(x_2) = 0$. Θα δείξω ότι αυτή η εξίσωση έχει για το x_2 του είδους στο $(2, 3)$

$$x g'(x) - g(x) = 0 \xrightarrow{x \neq 0} \left(\frac{g(x)}{x} \right)' = 0$$

$$\text{Έστω } \varphi(x) = \frac{g(x)}{x}, \quad \varphi \text{ συνεχής στο } [2, 3], \quad \varphi \text{ παραγ. στο } (2, 3) \text{ με } \varphi'(x) = \frac{g'(x) \cdot x - g(x)}{x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(2) &= \frac{g(2)}{2} \\ \varphi(3) &= \frac{g(3)}{3} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(R)} \varphi(2) = \varphi(3) \text{ Άρα από θ. Rolle } \exists x_2 \in (2, 3): \varphi'(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 \cdot g'(x_2) - g(x_2) = 0$$

Άρα το συμπέρασμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1, 20]$ για τη συνάρτηση f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 20)$ τέτοιο ώστε $\xi = \frac{19 \cdot \log e}{1 + \log 2}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση f για την οποία να ισχύει $f'(x) = g(x)$ (1).

β) Από όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες έχουν την ιδιότητα (1) να βρείτε εκείνη της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο $(-2, -2)$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) της οποίας η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

3. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^\mu (x - \beta)^\nu$, μ, ν θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi = \frac{\nu\alpha + \mu\beta}{\mu + \nu}$.

β) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισχύει

$$\frac{\xi - \alpha}{\beta - \xi} = \frac{\mu}{\nu}. \quad (\text{Εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στο διάστημα } [\alpha, \beta])$$

4. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha + h) < \eta\mu\alpha + h\sigma\upsilon\nu\alpha$, όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \frac{\pi}{2}$.

$$(\text{Η ανισότητα γράφεται } \frac{\eta\mu(\alpha + h) - \eta\mu\alpha}{(\alpha + h) - \alpha} < \sigma\upsilon\nu\alpha \text{ και } \Theta.\text{M.T. για την } f(x) = \eta\mu x \text{ στο } [\alpha, \alpha + h].)$$