

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

2.6 Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

1. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύει: $f'(x) = e^x - \eta\mu x$ και $f(0) = 1$
2. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f , $x > 0$ αν ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ και $f(1) = 4$
3. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f , $x > 0$ αν ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}} + x^2 + \sqrt{x} + e^x$ και $f(1) = 0$
4. Να βρείτε την 3-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύει: $f'''(x) = 30$, $x \in \mathbb{R}$ και $\begin{cases} f(-1) = -5 \\ f(0) = 3 \\ f(1) = 13 \end{cases}$

$$f(x) = 5x^3 + x^2 + 4x + 3 \quad (\text{Παν.236})$$

5. Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(1) = 1$ και ισχύει: $xf'(x) \cdot \ln x + f(x) = 4x^4$ για κάθε $x > 1$.
6. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύει: $f'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x + \frac{2x}{x^2+1}$ και $f(0) = e$

$$f'(x) = (e^{x^2+1} + \ln(x^2+1))'$$
7. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύουν :
 1. $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f(0) = 1$
 2. $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2-x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ με $f(-1) = 1$
 3. $f'(x) = \frac{2x \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^2 \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0) = 1$
 4. $f'(x) = \frac{x+2}{x}$, $x > 0$ με $f(1) = -1$
 5. $x^2 \cdot f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $x > 0$ με $f(1) = 1/2$
 6. $f'(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}$, $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$
8. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύουν:

1. $f'(x) - f(x) = x^3 - 3x^2$ με $f(0) = 1$
2. $f'(x) - x \cdot f(x) = 0$ με $f(1) = \sqrt{e}$

Υποδ: 1. $f'(x) - f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) + 3x^2 = f(x) + x^3 \Rightarrow (f(x) + x^3)' = f(x) + x^3 \Rightarrow g'(x) = g(x) \Rightarrow$

$$g(x) = c \cdot e^x \Rightarrow f(x) = c \cdot e^x - x^3 \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} c = 1, \text{ άρα } f(x) = e^x - x^3$$

9. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(2) = 1$ και ισχύει: $x^2 \cdot f'(x) = 2 - 3x \cdot f(x)$ για κάθε $x > 0$.

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 \cdot f(x) - x^2$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$
2. Να βρεθεί η f .

Υποδ: λύνω ως προς f' και αντικαθιστώ στην g' και προσπαθώ να δείξω ότι $g'(x) = 0$

10. Έστω $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} x \cdot g'(x) \cdot \ln x - g(x) = g(x) \cdot \ln x^x \\ g(e) = e^e \end{cases}$$

- Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{g(x)}{\ln x}$, $x > 1$ να δείξετε ότι: $f'(x) = f(x)$
- Να βρεθεί η $g(x)$

$$g(x) = e^x \cdot \ln x \text{ (Παν.238)}$$

11. Να βρείτε την 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύει: $f''(x) = 2e^{-x} + 1$ και $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

$$f(x) = 2e^{-x} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1 \text{ (Παν.233)}$$

12. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει: $x \cdot f'(x) = \eta \mu x - f(x)$ και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Υποδ: $(x \cdot f(x))' = (-\sin x)'$ με $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, άρα $x \cdot f(x) = \begin{cases} -\sin x + c_1, & x < 0 \\ -\sin x + c_2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\sin x}{x} + \frac{c_1}{x}, & x < 0 \\ \frac{-\sin x}{x} + \frac{c_2}{x}, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\pi}{2} \\ c_2 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $(x-2) \cdot f'(x) = 3x^2 - 5x - 2, x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(0)=3$. Να βρεθεί η f .

$$(f'(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x-2}, x \neq 2 \Rightarrow f'(x) = 3x+1, x \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 3\frac{x^2}{2} + x + c_1, x < 2 \\ f(x) = 3\frac{x^2}{2} + x + c_2, x > 2 \end{cases} \text{ όμως } f(0)=3 \text{ άρα } c_1 = 3, \text{ όμως } f$$

$$\text{συνεχής στο } 2 \text{ άρα } c_1=c_2. \text{ Άρα } \left\langle f(x) = 3\frac{x^2}{2} + x + 3, x \in \mathbb{R} \right\rangle$$

14. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει: $x \cdot f'(x) = f(x) + 2x^3$ και $f(1) = 1$

Υποδ: αν $x = 0$ τότε από αρχική σχέση έχω $f(0)=0$. Αν $x \neq 0$ έχω:

$$x \cdot f'(x) = f(x) + 2x^3 \Rightarrow x \cdot f'(x) - f(x) = 2x^3 \Rightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = 2x \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (x^2)' \xrightarrow{\text{Συνέντ.Θ.Μ.Τ}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x)}{x} = x^2 + c_1, x < 0 \\ \frac{f(x)}{x} = x^2 + c_2, x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + c_1 \cdot x, x \leq 0 \\ x^3 + c_2 \cdot x, x > 0 \end{cases} \text{ Το } (=) \text{ το έβαλα γιατί } f(0)=0. \text{ Από τον τύπο βλέπω ότι είναι συνεχής στο } 0 \text{ πρέπει όμως να είναι και}$$

$$\text{παραγωγίσιμη, άρα πρέπει } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + c_1 x}{x} = c_1 \text{ να ισούται με το}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + c_2 x}{x} = c_2 \text{ Άρα } c_1 = c_2. \text{ Τελικά } f(x) = x^3 + c_1 \cdot x, \text{ όμως } f(1)=1 \text{ άρα } c_1=0, \text{ άρα } f(x)=x^3$$

15. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύει: $(x^2 - 2 \cdot x) \cdot f'(x) = 1 - x \cdot f(x)$ για $x > 0$.
Επίσης να βρείτε το $f'(2)$

Υπόδ: $(x^2 - 2x)f'(x) = 1 - xf(x) \Rightarrow x(x-2)f'(x) = 1 - xf(x) \xrightarrow{x \neq 0}$

$$(x-2)f'(x) = \frac{1}{x} - f(x) \Rightarrow (x-2)f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow [(x-2)f(x)]' = (\ln x)' \Rightarrow$$

$$(x-2)f(x) = \ln x + c \quad \forall x > 0 \text{ για } x=2 \text{ έχω } c = -\ln 2 \text{ άρα}$$

$$(x-2)f(x) = \ln x - \ln 2$$

- εστω $x \neq 2 \quad f(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$

- f συνεχής στο 2 αφού f παραγωγίσιμη άρα $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$
 $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \text{D.L.H} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{2} \text{ άρα}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2} & x \in (0, 2) \cup (2, +\infty) \\ \frac{1}{2} & x = 2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(1/2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\ln x - \ln 2}{x-2} - \frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\ln x - 2\ln 2 - x + 2}{2(x-2)^2} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\frac{0}{0}} \text{D.L.H} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x} - 1}{4(x-2)} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \text{D.L.H} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{2}{x^2}}{4} = \frac{-2}{4 \cdot 2^2} = -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{8} \right)$$

16. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύει: $x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) \cdot \ln(f(x)) = 0$ με $x > 0$, $f(x) > 0$ και $f(1) = e$

(διαιρούμε με $f(x)$ όλα τα μέλη $(x^2 \cdot \ln(f(x)))' = 0$)

17. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει:

$$x \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) = 2x - e^{f(x)}, x > 0 \text{ και } f(1) = 0$$

$$(e^{f(x)} \cdot x)' = (x^2)', x > 0$$

18. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \cdot f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ και ισχύει $f(0) = -\sqrt{2}$. Να βρεθεί η f .

19. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν ισχύει: $f'(x) + 3x^2 \cdot f(x) = 0$ και $f(0) = 1$

(πολ/ζω με e^{x^3})

20. Θέμα πανελλαδικές 2015

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

Υπόψ: $f'(x) \cdot (e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = 2 \Rightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 2$

$(e^{f(x)})' - (e^{-f(x)})' = (2x)' \Rightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$ Συνιστάται Θ.Μ.Τ

$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + C$ Για $x=0$ έχουμε $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = C \Rightarrow$ f(0)=0

$C=0$ ορα $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Rightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Rightarrow$

$e^{2f(x)} - 2x \cdot e^{f(x)} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2f(x)} - 2 \cdot e^{f(x)} \cdot x + x^2 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$(e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow |e^{f(x)} - x| = \sqrt{x^2 + 1}$ Έστω $g(x) = e^{f(x)} - x$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 0$ αδύνατο ορα $g(x) \neq 0$ ορα

Οφείναι είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο ορα $g(0) = e^{f(0)} = 1 > 0$

ορα $g(x) > 0$ ορα $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$

ορα $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

21. Θέμα Πανελλήνιες 2005

ΘΕΜΑ 4°

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^x - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α. Ναδειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

Υπόσ: $2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Rightarrow 2e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^x \Rightarrow (2e^{f(x)})' = (e^x)'$

Συνέπεια
Ο.Μ.Τ $2e^{f(x)} = e^x + C$ για $x=0$ $2e^{f(0)} = e^0 + C \Rightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow C=1$

Άρα $2e^{f(x)} = e^x + 1 \Rightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

22. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) + 2x \cdot f(x) = -2x^3 - 2x$ και $f(0)=1$

- Αν $f(x) \neq -x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $f(x) > -x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
- Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

10). $f'(x) + 2x + 2x(f(x) + x^2) = 0$

Θέτω $g(x) = f(x) + x^2$, $g(x) \neq 0$, όμως g συνεχής

από f παραγωγίσιμη άρα $g(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$

όμως $g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > -x^2$

• ισχύει $g'(x) + 2x \cdot g(x) = 0 \xrightarrow{\cdot e^{x^2}} e^{x^2} \cdot g'(x) + 2x \cdot e^{x^2} \cdot g(x) = 0 \Rightarrow$

$(g(x) \cdot e^{x^2})' = 0 \Rightarrow g(x) \cdot e^{x^2} = C \xrightarrow{g(0)=1} 1 \cdot 1 = C \Rightarrow C=1$ άρα

$g(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f(x) + x^2 = e^{-x^2} \Rightarrow f(x) = e^{-x^2} - x^2$

23. Θέμα Μάιος 2013**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 9

24. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f''(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ με $f'(0) = 0$, $f(0) = e$ και $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η f .

$$f''(x) = (x \cdot f(x))'$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad f''(x) &= f(x) + x f'(x) \Rightarrow f''(x) = (x \cdot f(x))' \Rightarrow \\ f'(x) &= x f(x) + c_1 \xrightarrow{f'(0)=0} c_1 = 0 \text{ αρα } f'(x) = x \cdot f(x) \xrightarrow{f(x) > 0} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= x \Rightarrow \left[\ln f(x) \right]' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + c_2 \\ \xrightarrow{f(0)=e} \ln e &= c_2 \Rightarrow c_2 = 1 \text{ αρα } \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \Rightarrow \\ f(x) &= e^{\frac{x^2}{2} + 1} \Rightarrow f(x) = e \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

25. Έστω $f(x) = \eta \mu^\lambda x + \sigma \nu \nu^\lambda x$. Να βρεθεί το λ ώστε η f να είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της (Παν.138)

26. Να αποδειχτούν οι ταυτότητες $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ \text{και} \\ \eta \mu 2x = 2\eta \mu x \cdot \sigma \nu \nu x \end{array} \right\}$ (Παν.147)

27. Να αποδειχτούν οι ταυτότητες $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + \psi^2) = (\alpha x + \beta \psi)^2 + (\alpha \psi - \beta x)^2 \\ \text{και} \\ \epsilon \phi x \cdot \sigma \phi x = 1, \quad x \neq \pi + \frac{\pi}{2}, x \neq \kappa \pi, \bullet \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$ (Παν.151)

28. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ και ισχύει: $\left\langle \begin{array}{l} f'' = -f \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\rangle$

➤ Να δειχθεί ότι: η $g(x) = f(x) \cdot \eta \mu x + f'(x) \cdot \sigma \nu \nu x$ είναι σταθερή στο A .

➤ Αν $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ να δειχθεί ότι:

- $f'(x) = -f(x) \cdot \epsilon \phi x$
- Αν $f > 0$ να βρεθεί ο τύπος της f (Παν. 158)

29. Να βρεθεί η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ με $f(x) > 0$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα x και ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \cdot f(x) = \lambda, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \\ f(0) = 1 \\ f(1) = e \end{array} \right\}. \text{ Επίσης να βρεθεί το } \lambda. \quad (\text{Παν.239})$$

Μονοτονία

30. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^{x^3} + 1$

31. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ (Παν.159)

32. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^6}{6} - 3x^5 + \frac{85x^4}{4} - \frac{225x^3}{3} + 274\frac{x^2}{2} - 120x.$$

(Με Horner έχουμε $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$)

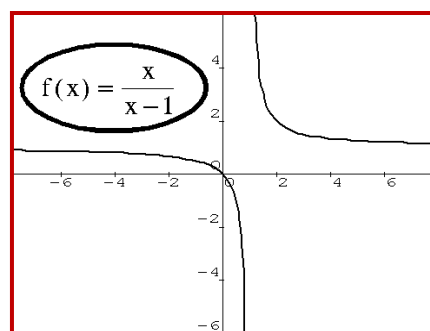
33. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = x^3 - 3\alpha x + 1$ για τις διάφορες τιμές του α (Παν. 161)

34. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = a^x \cdot x^2, (a > 0)$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας για τις διάφορες τιμές του a . (Παν.162)

35. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

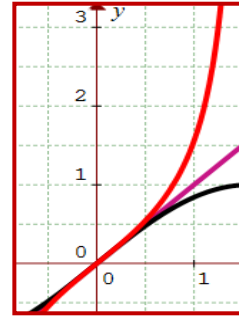
$$f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ και ναδειχθεί ότι}$$

$$\frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha + \beta| - 1} \geq \frac{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha| + |\beta| - 1}, \text{ με } \alpha + \beta > 1 \quad (\text{Παν.144})$$



36. Έστω $f(x) = e^x$. Με τη βοήθεια της μονοτονίας ναδειχθεί ότι $e^{|\alpha + \beta|} \leq e^{|\alpha|} \cdot e^{|\beta|}$

37. Να δειχθεί ότι $\left\{ \begin{array}{l} \eta\mu x \leq x, \text{ για } x \geq 0 \\ \epsilon\phi x \geq x, \text{ για } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right\}$



38. Να δείξετε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

- Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu^x \theta + \sigma\upsilon\nu^x \theta = 1, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει μοναδική λύση την προφανή.
- Να λυθεί η εξίσωση $\ln x + x^3 = 1, x \in (0, +\infty)$ (Προφανή λύση $x=1$ μονοτονία για μοναδικότητα Παν.145-146)

39. Έστω $f(x) = \sqrt[2021]{x} + \sqrt[2021]{12-x}$

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία
- Να βρεθεί το πεδίο τιμών.
- Να δείξετε ότι $\sqrt[2021]{2} + \sqrt[2021]{10} < \sqrt[2021]{5} + \sqrt[2021]{7}$

40. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - e^2}{x - 2}$

- Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$
- Να δείξετε ότι $(\pi - 2)(e^e - e^2) < (e - 2) \cdot (e^\pi - e^2)$

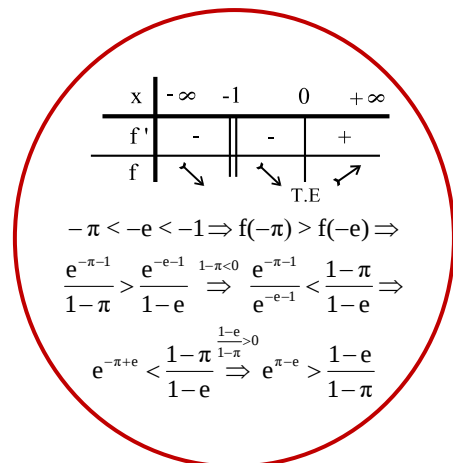
(Στην εύρεση του προσήμου της 1ης παραγώγου κάνουμε Θ.Μ.Τ στο $(2, x)$ μετά $2 < e < \pi$ άρα $f(e) < f(\pi)$)

Παν. 150) Λύνεται και αλλιώς: $f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-2) - (e^x - e^2)}{(x-2)^2} = \frac{x \cdot e^x - 3e^x + e^2}{(x-2)^2}$ Θέτω $h(x) = x \cdot e^x - 3e^x + e^2$

$h'(x) > 0$, για $x > 2$ Παρατήρηση: η f είναι γνησίως αύξουσα και για $x < 2$

41. Έστω $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x+1}$.

- Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.
- Να δειχθεί ότι: $\frac{\beta+1}{\alpha+1} < e^{\beta-\alpha}$ με $0 < \alpha < \beta$
($0 < \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \dots$ Παν.157)
- Να δειχθεί ότι: $e^{\pi-e} > \frac{1-e}{1-\pi}$



42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$

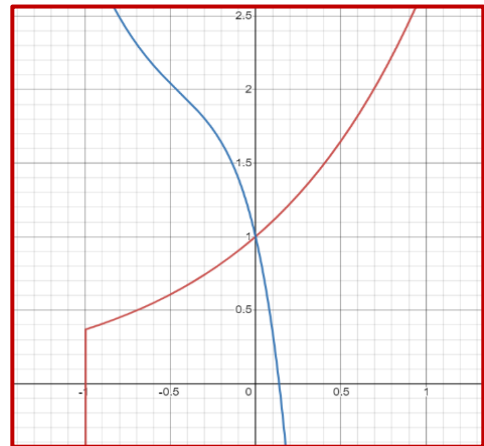
➤ Ναδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

➤ Ναδειχθεί ότι για $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} < \frac{\eta\mu\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\eta\mu\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)} \quad (\text{Παυ.164})$$

43. Έστω οι συναρτήσεις $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = e^{2x} + x^{2021} \\ \text{και} \\ g(x) = -e^{5x} - x^3 + 2 \end{array} \right\}$ Να

δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών έχουν μόνο ένα κοινό σημείο το οποίο και να βρεθεί. (Παυ.165)



44. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 5x$

45. Μάιος 2010

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

46. Έστω $f(x) = x^9 + 2x^3 + x - 1$

1. Ναδειχθεί ότι f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
3. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^9 + 2x^3 + x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

47. Έστω $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
2. Αν $\alpha \in [0, 2\pi]$, για ποιες τιμές του α ισχύει: $f(x) = \eta\mu\alpha$

48. Έστω $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(0, -1)$. Να δείξετε ότι από το σημείο A διέρχεται μόνο μια εφαπτομένη προς τη γραφική παράσταση της f .

Υποδ: έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\psi - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot (x - x_0)$.

Το σημείο A την επαληθεύει άρα $-1 - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot (-x_0) \Rightarrow e^{x_0} \cdot x_0 - e^{x_0} - 1 = 0$.

Επομένως θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x) = e^x \cdot x - e^x - 1$ έχει μοναδική λύση.

Από την μονοτονία της g και το σύνολο τιμών προκύπτει το συμπέρασμα.

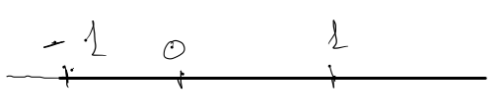
49. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f γνησίως αύξουσα και f' γνησίως αύξουσα.

1. Να λυθεί η εξίσωση: $f(\eta\mu x + 1) - f(\sigma\upsilon\nu x + 1) = f(\eta\mu x) - f(\sigma\upsilon\nu x)$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + f(x^5) = f(x^3) + f(x^7)$

3. Αν ισχύει $f(0)=1$, να λυθεί η εξίσωση $f(\eta\mu x) + \frac{1}{f(\eta\mu x)} = 2$

① η απεικονιστική εξίσωση γίνεται: $f(\eta\mu x + 1) - f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x + 1) - f(\sigma\upsilon\nu x)$
 $\Rightarrow g(\eta\mu x) = g(\sigma\upsilon\nu x)$ όπου $g(w) = f(w+1) - f(w)$
 οπώς $g'(w) = f'(w+1) - f'(w) > 0$ γιατί $w+1 > w \xrightarrow{f' \uparrow} f'(w+1) > f'(w) \Rightarrow f'(w+1) - f'(w) > 0$ άρα $g'(w) > 0$ άρα g $\uparrow$ - $\uparrow$
 Άρα από ① $\Rightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\omega(\frac{\pi}{4} - x) = \sigma\omega x \Leftrightarrow$
 $\frac{\pi}{4} - x = 2k\pi \pm x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 2k\pi + x \Leftrightarrow 2x = -2k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$
 $x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

② $f(x) + f(x^5) = f(x^3) + f(x^7)$ $x = -1, x = 0, x = 1$
 Προφανώς εις $x=1$

 • Αν $x < -1$ τότε $\left. \begin{matrix} x > x^3 \\ x^5 > x^7 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{f' \uparrow} \left. \begin{matrix} f(x) > f(x^3) \\ f(x^5) > f(x^7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x) + f(x^5) > f(x^3) + f(x^7)$
 • Αν $-1 < x < 0$ τότε $\left. \begin{matrix} x < x^3 \\ x^5 < x^7 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{f' \uparrow} \left. \begin{matrix} f(x) < f(x^3) \\ f(x^5) < f(x^7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x) + f(x^5) < f(x^3) + f(x^7)$
 • Αν $0 < x < 1$ τότε $\left. \begin{matrix} x > x^3 \\ x^5 > x^7 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{f' \uparrow} \left. \begin{matrix} f(x) > f(x^3) \\ f(x^5) > f(x^7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x) + f(x^5) > f(x^3) + f(x^7)$
 • Αν $1 < x$ τότε $\left. \begin{matrix} x < x^3 \\ x^5 < x^7 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{f' \uparrow} \left. \begin{matrix} f(x) < f(x^3) \\ f(x^5) < f(x^7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x) + f(x^5) < f(x^3) + f(x^7)$
 άρα οι ριζές είναι μοναδικές

$$\begin{aligned} 3) \quad f(u_h x) + \frac{1}{f(u_h x)} = 2 &\Leftrightarrow f^2(u_h x) - 2f(u_h x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ (f(u_h x) - 1)^2 = 0 &\Leftrightarrow f(u_h x) = 1 \Leftrightarrow f(u_h x) = f(0) \xRightarrow{f \uparrow} \\ u_h x = 0 &\Leftrightarrow u_h x = u_h 0 \Leftrightarrow x = 2u_h n \wedge x = 2u_h n + \pi \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

50. Αν ισχύει : $\alpha^3 + \ln \alpha + e^\alpha = \beta^3 + \ln \beta + e^\beta$ $\alpha, \beta > 0$. Να δείξετε ότι $\alpha = \beta$

Υποδ: Έστω $f(x) = x^3 + \ln x + e^x$, είναι γνησίως αύξουσα άρα «1-1», συνεπώς $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$

51. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε : $f'(x) - f(x) = 2e^x$ και $f(0)=0$

1. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Αν $f(x) = e^x - e^{-x}$ και σώμα $M(x(t), \psi(t))$ κινείται κατά μήκος της C_f με $x'(t) > 0$,

2. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης μόνο σε μια θέση.

3. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης να ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης επί την τετμημένη της θέσης του σημείου M δεν συμβαίνει για καμία χρονική στιγμή.

4.

$$\begin{aligned} \text{Υπόδ: } 1) \quad f'(x) + f(x) = 2e^x &\Rightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow \\ [e^x f(x)]' = (e^{2x})' &\Rightarrow e^x f(x) = e^{2x} + C \xrightarrow{f(0)=0} 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1 \\ \text{αρα } e^x f(x) = e^{2x} - 1 &\Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \Rightarrow f(x) = e^x - e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Υπόδ: } 2) \quad \psi'(t) = 2x'(t) &\Leftrightarrow [e^{x(t)} - e^{-x(t)}]' = 2x'(t) \Leftrightarrow e^{x(t)} \cdot x'(t) + e^{-x(t)} \cdot (-x'(t)) = 2x'(t) \Leftrightarrow \\ x'(t) (e^{x(t)} - e^{-x(t)}) &= 2x'(t) \xrightarrow{x'(t) > 0} e^{x(t)} - e^{-x(t)} = 2 \Leftrightarrow e^{2x(t)} - 2e^{x(t)} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{x(t)} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ x(t) = 0 &\text{ Άρα η θέση είναι μοναδική} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \psi'(t) &= x'(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow e^{x(t)} \cdot x'(t) + e^{-x(t)} x'(t) = x'(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow \\
 e^{x(t)} + e^{-x(t)} &= x(t) \Leftrightarrow e^{2x(t)} + 1 = x(t) \cdot e^{x(t)} \Leftrightarrow e^{2x(t)} - x(t) \cdot e^{x(t)} + 1 = 0 \\
 \text{Έστω } g(x) &= e^{2x} - x e^x + 1, \quad g'(x) = 2e^{2x} - e^x - x e^x = e^x (2e^x - x - 1) \Rightarrow \\
 g'(x) &= e^x (e^x + \underbrace{e^x - x - 1}_{\geq 0}) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$g(x) = e^{2x} - x e^x + 1$$

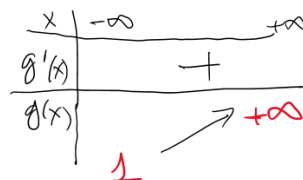
$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - x e^x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$$

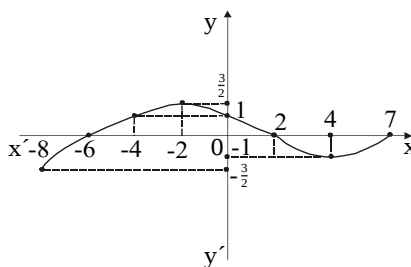
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) \stackrel{(+\infty) \cdot (1-0+0)}{=} +\infty$$

Από το Σ. τιμών καταλαβαίνω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει να λύνεται
σε α η εξίσωση $e^{2x(t)} - x(t) e^{x(t)} + 1 = 0$ δεν ικανοποιείται για
καμία πραγματική σχέση



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

1. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-8, 7]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.



- Να μελετήσετε το πρόσημο της $f(x)$.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$.
- Να βρείτε το πρόσημο της $f'(x)$ και να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της $f(x)$.
- Αν $g(x) = e^{f(x)}$ και $h(x) = \ln[f(x)]$, $x \in (-6, 2)$, να εξετάσετε τις g, h ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

Υποδ: α) $f(x) < 0$ όταν $x \in [-8, -6) \cup (2, 7)$. Ενώ $f(x) \geq 0$ αν $x \in [-6, 2]$

β) $x \in (-4, -1)$

γ) $f \uparrow$ στο $[-8, -2]$, $f \downarrow$ στο $(-2, 4]$, $f \uparrow$ στο $(4, 7]$

δ) $g'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$, άρα η g έχει την ίδια μονοτονία με την f στο διάστημα $(-6, 2)$. Το ίδιο ισχύει και για την

$$h(x), \text{ αφού } h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ και } f(x) > 0 \text{ στο } (-6, 2)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $g'(x) = \frac{1}{x} (f'(x) - \frac{f(x)}{x})$.

γ) Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Υποδ: γ) $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$ από το Θ.Μ.Τ. με $\xi \in (0, x)$. Επειδή όμως η f' είναι $\uparrow$ στο $(0, +\infty)$, άρα $f'(x) > f'(\xi)$ για κάθε ξ στο διάστημα $(0, x)$, άρα $g'(x) > 0$.

3. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

Υποδ: α) Ο βαθμός του πρέπει να είναι πάνω από 2 και κάτω από 4, άρα είναι 3

β) Ισχύει $ax^3 + bx^2 + cx + d = 3ax^2 + 2bx + c + x^3$, άρα $a = 1$, $b = 3$, $c = 6 = d$, άρα $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$

γ) Είναι περιττού βαθμού, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

$P'(x) = 3x^2 + 6x + 6 > 0$, άρα $P(x) \uparrow$, άρα η ρίζα είναι μοναδική

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ και $P(0) = 6$, άρα η ρίζα είναι αρνητική. Θα μπορούσαμε να πούμε ακόμα ότι $P(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

4. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$, ώστε $P(x) \neq Q(x)$ και $P''(x) \neq Q''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = Q'(x)$ έχει ακριβώς μια λύση, εξετάζοντας το βαθμό του $S(x) = P(x) - Q(x)$.

Υποδ: Έστω ότι το $S(x) = P(x) - Q(x)$ είναι άρτιου βαθμού. Τότε το S' είναι περιττού, άρα έχει πραγματική ρίζα, αν όμως είχε δύο ρίζες, τότε το S'' θα είχε ρίζα (άτοπο). Αν $S(x)$ περιττού βαθμού, τότε και S'' περιττού βαθμού, άρα θα είχε ρίζα (άτοπο)

5. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0, 6]$. Αν η C_f περνά από το σημείο $A(0, 1)$ και ισχύει: $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0, 6]$, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 6]$.

β) $g(x) > 1, x \in [0, 6]$.

γ) το σημείο $B(6, 18)$ δεν ανήκει στη C_f .

Υποδ: α) $g'(x) = f'(x) - x > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα

β) $g(0) = 1$, άρα $g(x) \geq 1$ στο $[0, 6]$, αφού $g \uparrow$

γ) $g(6) = f(6) - 18$, άρα $f(6) = g(6) + 18 \geq 19$ από (β)