

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση φορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύει:

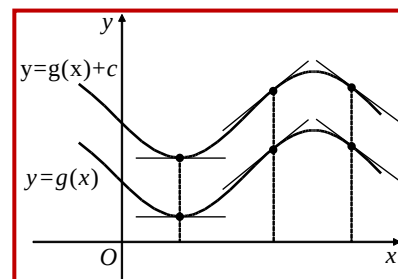
- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ ,
- τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Πόρισμα

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ .

Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ ,
- τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$



Παρατηρήσεις

➤ Γεωμετρική ερμηνεία

Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν σε οποιοδήποτε x που ανήκει στο Δ παράλληλες εφαπτόμενες, τότε η γραφική παράσταση της μίας προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση, της άλλης γραφικής παράστασης κατά c μονάδες, προς τα πάνω αν $c > 0$ ή προς τα κάτω αν $c < 0$.

- #### ➤ Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Ισχύουν όμως σε κάθε διάστημα ξεχωριστά

Π.χ: $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$, ισχύει: $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

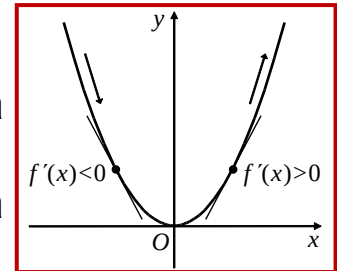
- #### ➤ Αν για την f ισχύει: $f'(x) = \kappa \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και κ πραγματικός αριθμός τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$: $f(x) = c \cdot e^{\kappa x}$
- #### ➤ Αν ισχύει $f'(x) = g(x)'$ με $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ τότε $f(x) = g(x) + c_1$ αν $x \in \Delta_1$ και $f(x) = g(x) + c_2$ αν $x \in \Delta_2$

Μονοτονία συνάρτησης

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ .

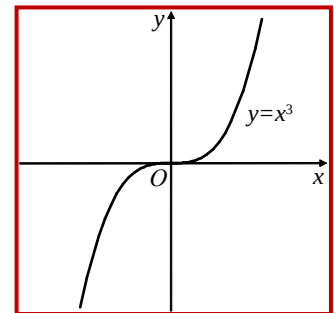
- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .



Παρατήρηση

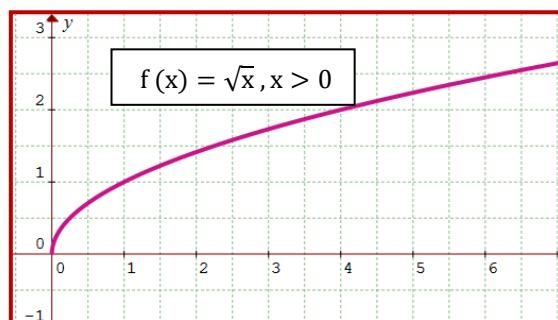
- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Π.χ: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}^*$ αλλά η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$ γιατί $-2 < 2$ όμως $f(-2) < f(2)$
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής και η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Π.χ $f(x) = \sqrt{x}$ ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$, η f' δεν ορίζεται στο μηδέν, όμως f συνεχής στο $[0, +\infty]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty]$.



ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει για πεπερασμένο πλήθος τιμών του x , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και όχι απλώς αύξουσα.

Απόδειξη: Έστω $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε σύμφωνα με γνωστό προηγούμενο θεώρημα η f είναι αύξουσα στο A δηλ. για κάθε:

$$x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η ισότητα δέν ισχύει ποτέ. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$

με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = \kappa$. Όμως η f στο $[x_1, x_2]$ είναι αύξουσα. Άρα $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow \kappa \leq f(x) \leq \kappa \Rightarrow f(x) = \kappa$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Έτσι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ άτοπα γιατί η ισότητα $f'(x) = 0$ ισχύει μόνο για πεπερασμένο πλήθος τιμών του x από υπόθεση.

Παρατήρηση

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και όταν τα σημεία μηδενισμού της f' είναι άπειρα μεν αλλά διακριτά πχ: $f(x) = x - \eta \mu x$, $f'(x) = 1 - \sin x$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{R}$. Επειδή $f'(x) > 0$ μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι γνησίως αύξουσα στα κλειστά διαστήματα $[p_n, p_{n+1}]$ και κατ' επέκταση σε όλο το $\mathbb{R}$.

