

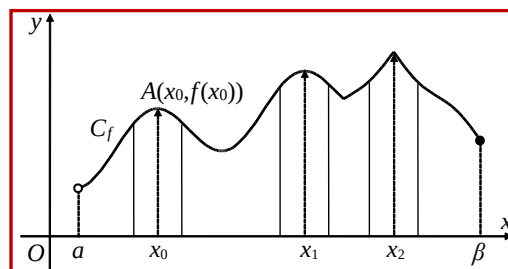
2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Ορισμός 1:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

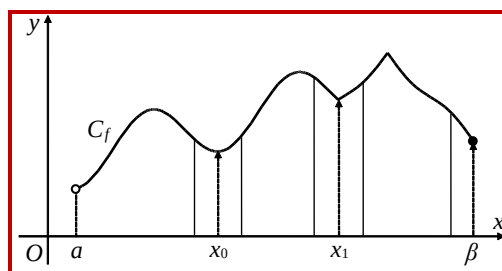
Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .



Ορισμός 2:

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .

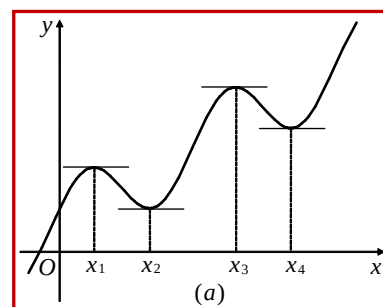


Παρατηρήσεις:

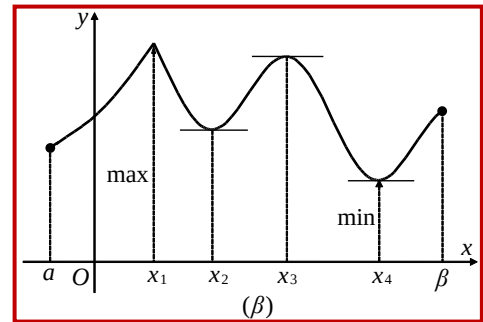
- Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$.
- Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.
- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.

- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.α).

- Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει,

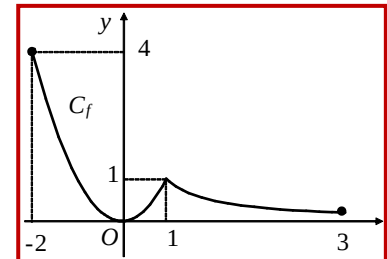


ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ.β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. α).



• Για παράδειγμα, η συνάρτηση

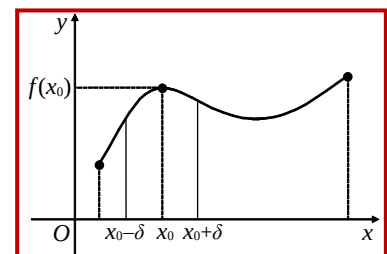
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$



- Στο $x_2 = -2$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(-2) = 4$
- Στο $x_1 = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο.
- Στο $x_2 = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1$.
- Στο $x_3 = 3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$



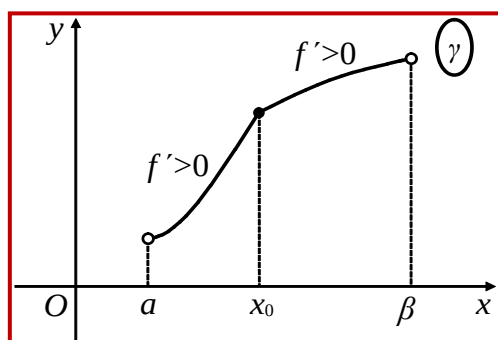
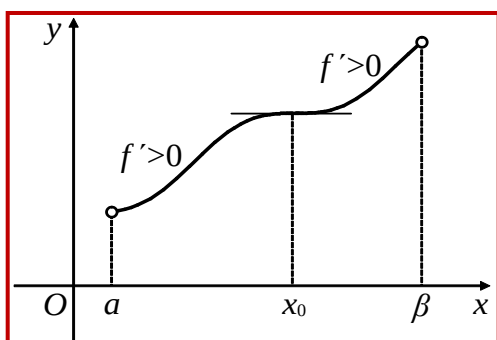
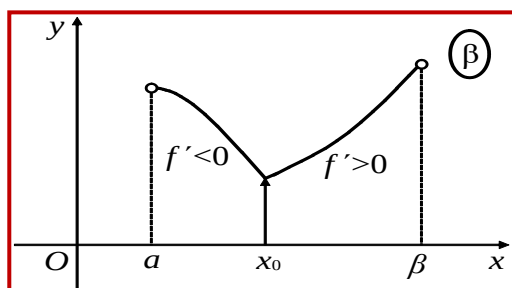
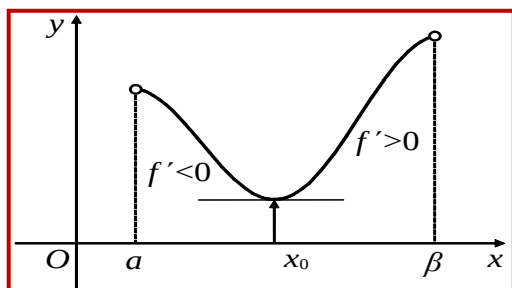
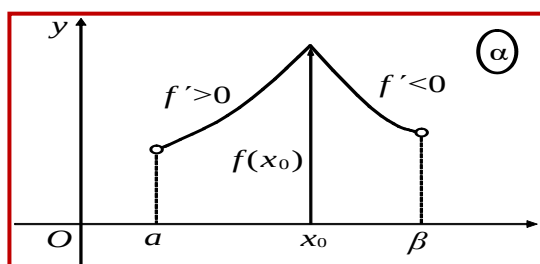
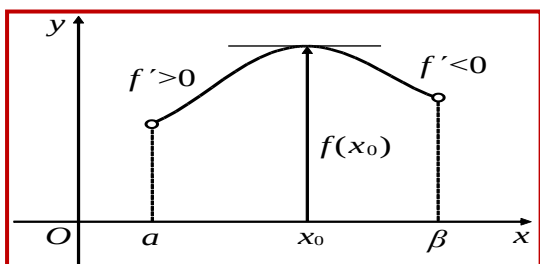
Παρατηρήσεις

- **Γεωμετρική ερμηνεία** : Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.
- **Κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ λέγονται τα **εσωτερικά** σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν,
- Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
 - Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
 - Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
 - Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (σχέδιο α)
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (σχέδιο β)
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (σχέδιο γ)



Παρατηρήσεις

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπως γνωρίζουμε, η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:
 1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .

2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.

3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f .

- Αν για το **κρίσιμο** σημείο x_0 μιας συνάρτησης f , γνωρίζουμε ότι η f' διατηρεί το πρόσημο της εκατέρωθεν του $0 < x$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και η f είναι γνησίως μονότονη.
- Σε συνάρτηση f **διπλού τύπου** για την εύρεση τοπικού ακρότατου στο σημείο x_0 που αλλάζει τύπο η f , δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα αλλά μόνο η συνέχεια της f στο x_0 και η μονοτονία της f , πριν και μετά το x_0 .
- Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x) > 0$ (ή $f(x) < 0$), τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μονοτονία της f ή να βρούμε ότι η f έχει ελάχιστο το $a > 0$ (ή μέγιστο το $a < 0$ αντίστοιχα)
- Αν μας ζητείται να δείξουμε ότι $f(x) \geq g(x)$, τότε θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ μετά βρίσκουμε μια προφανή ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ και με την μονοτονία της h καταλήγουμε στο συμπέρασμα ή βρίσκουμε τα ακρότατα της h .

