

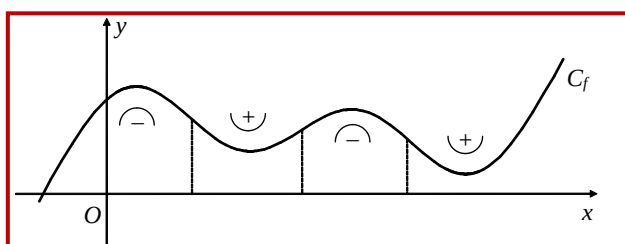
2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .



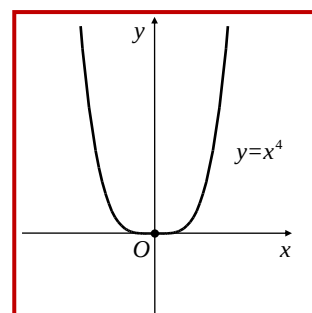
ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **κυρτή** στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **κοίλη** στο Δ .

Παρατηρήσεις:

- Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.
- Έστω η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Για να είναι:
 - η f κυρτή στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x του Δ
 - η f κοίλη στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x του Δ και η ισότητα και στις δυο περιπτώσεις να ισχύει για διακεκριμένες τιμές του x .

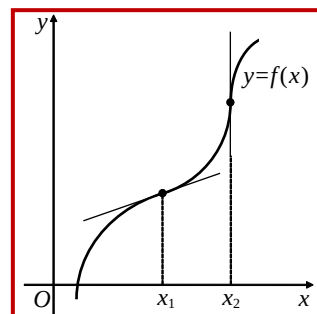


ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .



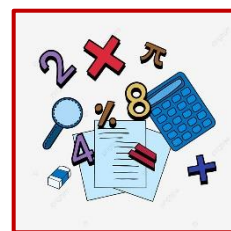
Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις:

- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Ισχύει $f''(x) = 12x^2$ δηλ. $f''(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0
- Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής.
- Επομένως, **οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:**
 - i) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και**
 - ii) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' (παραπάνω σχέδιο).**
- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν
 - ✓ η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
 - ✓ ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.
- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, βρίσκεται κάτω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή: Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε $x_0 \in \Delta$, βρίσκεται επάνω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή: Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Αν μια συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής.



Απόδειξη της παραπάνω πρότασης:

Εστω f κυρτή (κοίλα όαυ) τότε το C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της f

$$(\xi): \psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\psi = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Θα δείξω ότι $f(x) \geq \psi$ δηλαδή

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

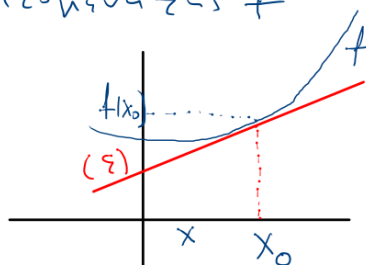
• για $x = x_0$ ισχύει το "="

• για $x < x_0$ έχω από Θ.Μ.Τ $\exists \xi_1 \in (x, x_0): f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\text{οπω} \xi_1 < x_0 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) \xrightarrow{x - x_0 < 0} f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

• για $x > x_0$ ομοίως $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Αλλιώς

Θέλω να δείξω ότι $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\text{Εστω } g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow x > x_0 \text{ γιατί } f' \uparrow$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow x < x_0 \text{ , , , }$$

		x_0	
g'	-		+
g	$\searrow$	T.E	$\nearrow$

$$\text{Άρα } g(x) \geq g(x_0) \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$