

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

1. Να βρεθούν οι πλάγιες και οι οριζόντιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων

$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x}$	$f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x - 1}$
$f(x) = 2x - \frac{3x + 2}{x - 2}$	$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
$f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 1}{x^2 + 1}$	$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$
$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$	$f(x) = \frac{x}{x + 1}$
$f(x) = \frac{ 3x - 1 + x}{x - 1}$	$f(x) = \frac{2x - x - 2 }{x - 1}$
$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$	$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

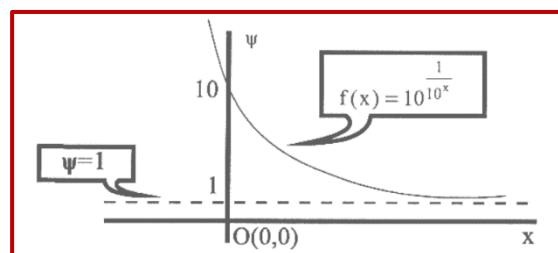
2. Να βρεθούν τα α, β ώστε η ευθεία $\psi = \alpha x + \beta$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 12x + 70} - x + 5 \quad \text{στο } +\infty$$

(Απ: $\alpha=1, \beta=8$)

3. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 10^{\frac{1}{10^x}}$

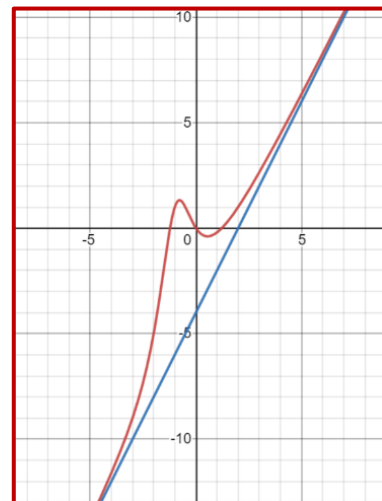
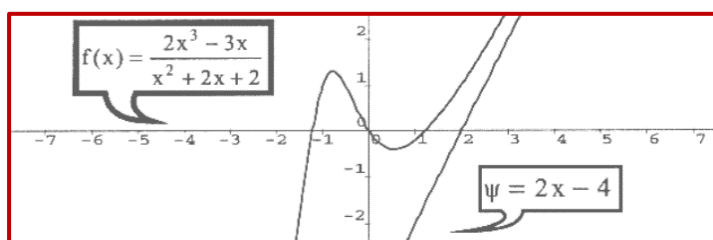
- Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, να βρεθούν οι ασύμπτωτες και ναδειχθεί ότι $f(x) > 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό.



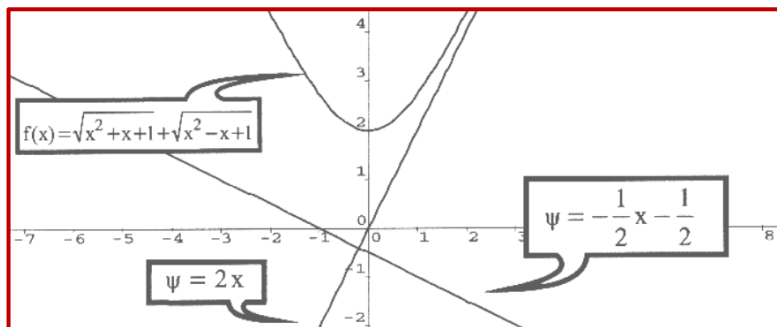
➤ Ναδειχθεί ότι: $\underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\dots\sqrt[10]{10}}}}}_{2022} > 1$ (Παν.205)

4. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε
$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(x + \psi) - f(x) = \psi \cdot (2x + \psi + 2) \\ \forall x, \psi \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$
. Να βρεθεί ο τύπος

της f και να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \frac{2x^3 - 3x}{f(x)}$ (Παν.206)



5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$. Να δειχθεί ότι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το $x \rightarrow +\infty$ είναι κάθετη στην ευθεία δ: $x + 2\psi + 1 = 0$. (Παν.207)



6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\kappa+1} \cdot f(x) - e^{\pi} \cdot x^{\kappa+2}}{x^{\kappa} \cdot f(x) - 2022} = e^{-\pi}$$

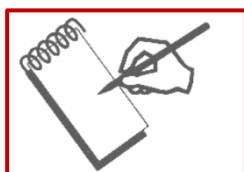
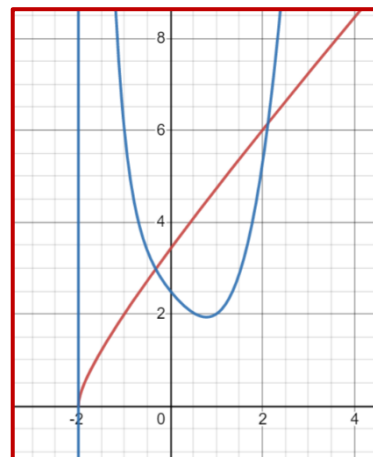
Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την πλάγια ασύμπτωτη

$\psi = e^{\pi} \cdot x + \alpha$ της C_f με τους άξονες xx' και $\psi\psi'$, είναι $E = \frac{1}{2e^{\pi}}$ (Παν.208)

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^4 + 5}{x + 2} \\ g(x) = \sqrt{x + 2} + x + 2 \end{array} \right\}$.

Να δείξετε ότι η ασύμπτωτη ευθεία της C_f είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $M(-2, g(-2))$ (Παν.209)

8. Αν $f(x) = 3x + 5 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.



ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

9. Να υπολογιστούν τα όρια:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\epsilon \phi x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sigma \upsilon \nu x}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$
$\lim_{x \rightarrow \kappa^+} (x - \kappa)^{x - \kappa}$	$\lim_{x \rightarrow \kappa} \left(\frac{x}{\kappa} \right)^{\frac{\alpha}{x - \kappa}}, x > 0, \kappa > 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\ln x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\frac{x}{e^3}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^2)$
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \phi x}{x - \frac{\pi}{2}}$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\kappa}{\ln x} - \frac{\lambda}{(x - 1)^2}, \kappa, \lambda > 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	Παν: 210,211,212,213,214,215,217,220,221,222,223,224,226

10. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu x)^{g(x)}$, αν η g είναι 2- φορές παραγωγίσιμη με $g(0)=0$,
 $g'(0) = 1, g''(0) = 2$ (Παν:216)

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{x+1}{e}} - e$. Να δειχθεί ότι:

$$\frac{\frac{f}{e} + f' \cdot e^2 - f'' \cdot e^3 + 1}{e^{\frac{3x+3-4e}{3e}}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{x-3}} \quad (\text{Παν 218})$$

12. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{1-e^x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Αν ισχύει: $g(0) = g'(0) = g''(0) = g'''(0) = g^{(4)}(0) = 0$, να

βρεθούν τα $f'(0) = f''(0)$. (Παν.219)

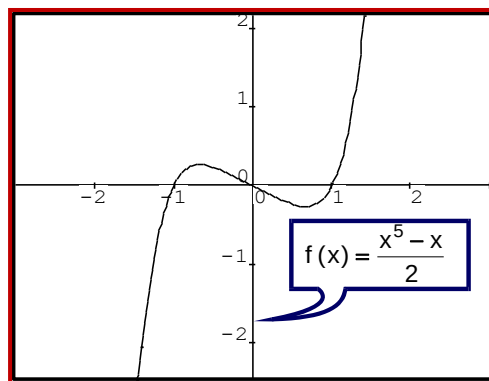
13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) < x \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και $f(1)=1, f'(1)=\kappa$. Να υπολογιστεί το
 $\lim_{x \rightarrow 1} [x - f(x)]^{x-f(x)}$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

14. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της

συνάρτησης $f(x) = \frac{x^5 - x}{2}$ (Παν. 228)

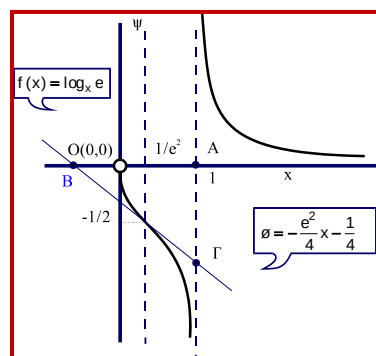
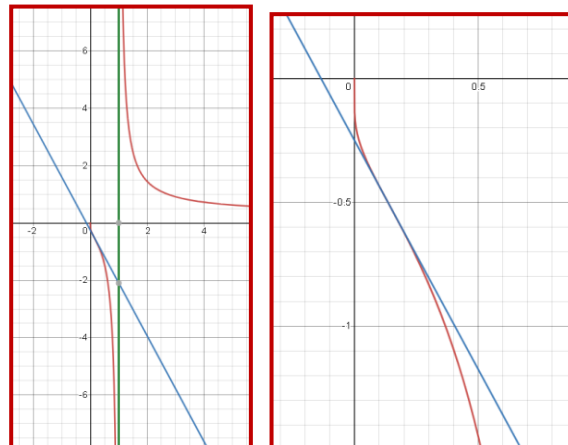
x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{5}$	0	$\sqrt[4]{5}$	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f''	-	-	0	+	+
f		↘	↘	↘	↗
		T.M	Σ.Κ		T.E



15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x > 0, \neq 1$.

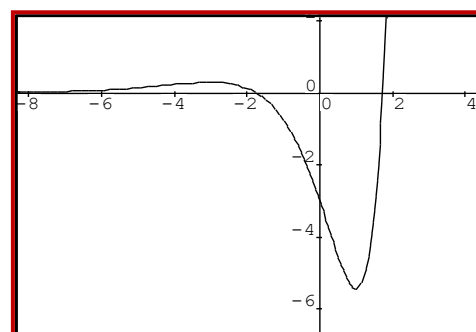
- Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση.
- Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της f και από την εφαπτομένη ευθεία στο σημείο καμπής της f . (Παν.229)

x	0	$1/e^2$	1	$+\infty$
f'	-	-	-	-
f''	+	○	-	+
f				



16. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 e^x - 3e^x$. (Παν.230)

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{5}$	-3	$\sqrt{5}-2$	1	$+\infty$
f'	+	+	○	-	-	○+
f''	+	○	-	-	○	+
f						



17. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}$

x	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	2π	
f'	+	○	-	-	○	+
f''	-	-	○	+	+	○
f						


T.M Σ.K T.E

