

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

ΟΡΙΣΜΟΣ

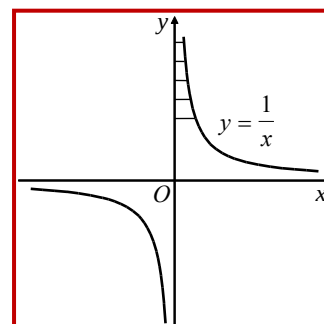
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Πχ: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$

Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $x = 0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f .



Για την ίδια συνάρτηση παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

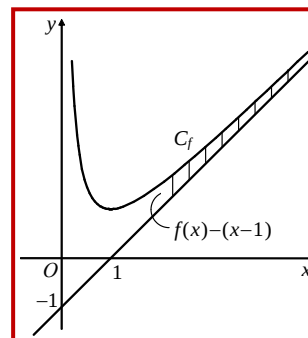
Επίσης παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Πχ: Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$
και η ευθεία $g(x) = x - 1$.

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, άρα καθώς το x τείνει στο $+\infty$, οι τιμές της f προσεγγίζουν τις τιμές της g . Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία $y = x - 1$. Στην



περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι **ασύμπτωτη (πλάγια)** της C_f στο $+\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (η απόδειξη παραλείπεται)

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}, \text{ αντιστοίχως}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήσεις

- Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη
- Αποδεικνύεται ότι:
 - Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
 - Δίνεται η ρητή συνάρτηση: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, h(x) \neq 0$
 - Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του παρανομαστή $h(x)$, τότε η ευθεία $\psi = 0$ δηλ. ο άξονας xx' είναι οριζόντια ασύμπτωτη.
 - Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι ίσος από το βαθμό του παρανομαστή $h(x)$, τότε η ευθεία $\psi = a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη, όπου a ο λόγος του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή προς το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρανομαστή.
 - Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά μια μονάδα μεγαλύτερος από το βαθμό του παρανομαστή $h(x)$, τότε η ευθεία $\psi = ax + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη, όπου $ax + \beta$ το πηλίκο της διαίρεσης $g(x) : h(x)$
 - Αν ο βαθμός του αριθμητή $g(x)$ είναι κατά δυο ή περισσότερες μονάδες μεγαλύτερος από το βαθμό του παρανομαστή, τότε δεν υπάρχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.
- Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:
 - Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
 - Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
 - Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, a)$.

Κανόνες de L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Παρατηρήσεις

- Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η μελέτη της συνάρτησης και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1^ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .

2^ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3^ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμψής.

4^ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5^ο Βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

6° Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f . Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f .

Παρατηρήσεις

- Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι **άρτια**, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **περιττή**, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O . Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο T , τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T .