

3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
Συνάρτηση	Παράγουσα
$f(x) = 0$	$F(x) = c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = 1$	$F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = x^\alpha,$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cot x + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Παράγουσες συναρτήσεων που προκύπτουν από τους κανόνες παραγωγίσης και ως σύνθεση μιας συνάρτησης f με μία βασική συνάρτηση

Συνάρτηση	Παράγουσα πραγματικός
$\varphi(x) = f'(x) + g'(x)$	$\Phi(x) = f(x) + g(x) + c$
$\varphi(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x) + c$
$\phi(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} =$	$\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
$\varphi(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = x \cdot f(x) + c$
$\phi(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$	$\Phi(x) = \frac{f(x)}{x} + c$
$\phi(x) = \sin f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \eta\mu f(x) + c$
$\phi(x) = \eta\mu f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = -\sin f(x) + c$
$\phi(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\Phi(x) = \sqrt{f(x)} + c$
$\phi(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = e^{f(x)} + c$
$\phi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\Phi(x) = \ln f(x) + c$
$\phi(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$\Phi(x) = -\frac{1}{f(x)} + c$
$\varphi(x) = f(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \frac{f^2(x)}{2} + c$
$\varphi(x) = f^v(x) \cdot f'(x)$	$\Phi(x) = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + c$

Παρατηρήσεις

- Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Το αντίστροφο δεν ισχύει, γιατί υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ , αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό π.χ:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής αλλά έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$

την

$$F(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Άλλο παράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά έχει

παράγουσα στο διάστημα αυτό τη συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

- Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.
- Οι τύποι του πίνακα με τις παράγουσες ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις που εμφανίζονται έχουν νόημα.
- Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε :

- Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$

- Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf

- Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , δεν έχει αναγκαία παράγουσα.

Πχ: Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \\ -2, & x \in (1,3] \end{cases}$, είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta = [0,3]$,

αλλά δεν υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο $\Delta = [0,3]$ τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$.

- Η παράγουσα μιας συνάρτησης αναφέρεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Π.χ: $f(x) = \frac{1}{x}$ και $F(x) = \ln|x|$. Ισχύει : $F'(x) = f(x)$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Άρα οι παράγουσες της $f(x)$ στο $(-\infty, 0)$ είναι οι $F(x) + c_1$ και στο $(0, +\infty)$ είναι οι $F(x) + c_2$ c_1, c_2 πραγματικοί αριθμοί.

Επομένως δεν έχει νόημα η φράση «η παράγουσα της $f(x)$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι η $F(x) + c$ »

- Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις, που δεν υπολογίζονται οι παράγουσες τους όπως οι : $\frac{\eta \mu x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\sqrt{\eta \mu x}$, $\frac{1}{\ln x}$, e^{-x^2} , $\eta \mu x^2$.

- Παράδειγμα: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ με πεδίο ορισμού $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ τότε η συνάρτηση $F(x) = \cot x$