

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$\int_1^2 \frac{x^2 - x + 5}{\sqrt{x}} dx$	$\int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x) dx$	$\int_0^1 (4x^4 + 5x^5 + 6x^6) dx$
$\int_0^1 (4x^4 + 5x^5 + 6x^6) dx$	$\int_1^2 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x} dx$
$\int_0^1 (x^4 + x^3)^2 dx$ (Ταυτότητα)	$\int_3^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$
$\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}) dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx$ (Ταυτότητα)
$\int_{-1}^1 x dx$	$\int_{-2}^1 4x + 5 dx$
$\int_{-1}^3 (x + x - 2) dx$	$\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \dots = \left[\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x} \right]_0^{\pi}$
$\int_{-3}^0 x^2 - x - 2 dx$	$\int_0^4 \frac{1}{x + 1} dx$
$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (6\eta\mu 2x + 2\sigma\upsilon\nu 3x) dx$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) dx$
$\int_2^5 \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$	$\int_0^{\pi} \left(3x^4 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \right) dx$
$\int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2 dx$ (Ταυτότητα)	

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \left(\frac{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^x}{e^x} \right) dx$

Υπόδειξη: $\int_0^1 \frac{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^x}{e^x} dx = \int_0^1 5 \cdot \left(\frac{3}{e} \right)^x dx + \int_0^1 3 \cdot \left(\frac{5}{e} \right)^x dx =$
 $\left[\frac{5 \left(\frac{3}{e} \right)^x}{\ln \left(\frac{3}{e} \right)} + \frac{3 \left(\frac{5}{e} \right)^x}{\ln \left(\frac{5}{e} \right)} \right]_0^1 = \dots$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \frac{(\sqrt{x} - x) \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})}{\sqrt[6]{x}} dx$ (Επιμεριστικά)

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (αντικατάσταση)

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx \quad u = \sigma\upsilon\nu x$	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^4 x} \right) dx \quad u = \eta\mu x$
$\int_1^e \left(\frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} \right) dx \quad u = \ln x$	$\int_0^1 [x^3 \cdot \ln(x^4 + 4)] dx \quad u = x^4 + 4$
$\int_0^1 [(10x - 1) \cdot (5x^2 - x + 9)^{2022}] dx$ $u = 5x^2 - x + 9$	$\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 4}} dx \quad u = x^4 + 4$
$\int_0^2 (2x + 1) \cdot e^{x^2 + x} dx \quad u = x^2 + x$	$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad u = e^x + 1$
$\int_0^3 \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} dx \quad u = x^2 + 6x + 10$	$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^5 + 2}} dx \quad u = x^5 + 2$
$\int_0^1 e^{5x-2} dx \quad u = 5x - 2$	$\int_{-1}^1 [(2x + 6) \cdot (x^2 + 6x + 3)^2] dx$ $u = x^2 + 6x + 3$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{\eta\mu x}} \right) dx \quad u = \eta\mu x$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx \quad u = \eta\mu x$
$\int_1^3 (2x + 3)^5 dx \quad u = 2x + 3$	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \epsilon\phi x dx \quad u = \sigma\upsilon\nu x$
$\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx \quad u = x^2$	$\int_0^1 [2(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2)^3] dx \quad u = x^2 - 2x + 2$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x dx \quad u = \eta\mu x$	$\int_1^e \frac{\ln x + 1}{x \ln x + e} dx \quad u = x \ln x + e$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu^2 x + 2} dx \quad u = \eta\mu^2 x + 2$	$\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}} \quad u = \ln x$
$\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^5 x} dx \quad u = \sigma\upsilon\nu x$	$\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 1} dx \quad u = x^3 + 1$

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: (παραγοντική)

$\int_{-1}^0 x \cdot e^x dx$	$\int_0^1 x^2 \cdot e^{3x} dx$
$\int_0^1 x \cdot e^{-3x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \eta\mu x dx$
$\int_1^3 x^4 \cdot \ln x dx$	$\int_1^2 x \cdot \ln 2x dx$
$\int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x dx$	$\int_0^4 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx \dots = \int_1^4 (\sqrt{x}) \cdot \ln x dx$

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \dots = \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x dx = \dots$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx \dots = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon \phi x)' \cdot x dx$
$\int_0^1 (x^2 - 5x + 8) \cdot e^{4x} dx$	$\int_1^2 (x+1)^3 \cdot \ln x dx$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 - 2x + 9) \cdot \eta \mu 3x dx$	

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_5^7 \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$ $x^2 - 5x + 4 = (x-1) \cdot (x-4)$ $\mu \epsilon A, B)$

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_5^7 \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$ $x^2 - 5x + 4 = (x-1) \cdot (x-4)$ $\mu \epsilon A, B)$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1} dx$ $(x^3 + 3x + 1)' = 3(x^2 + 1)$

9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x+1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$
 $\mu \epsilon A, B, \Gamma)$

10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x+1}{x^2 + 2x - 3} dx$ $\mu \epsilon A, B)$

11. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x + 1) \cdot (e^x + 2)} dx$ $u = e^x$

12. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x - \eta \mu x}{e^x + \sigma \upsilon \nu x} dx$ $\left[\ln(e^x + \sigma \upsilon \nu x) \right]_e^{\frac{\pi}{2}}$

13. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$ $\left[\ln(e^x - e^{-x}) \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

14. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{3+x}{2+x} dx$ $(3=2+1)$

15. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_e^3 \frac{e}{x \cdot \ln x} dx$ $[e \cdot \ln(\ln x)]_e^3$

16. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\alpha} \frac{x^{2022}}{x^{2022} + (\alpha - x)^{2022}} dx$ (Υποδ: θέτω $u = \alpha - x$)

17. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{e^x + 1} dx$ (Υποδ: θέτω $u = -x$)

18. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{\epsilon \phi x + \sigma \phi x} dx$ (Υποδ: θέτω $u = \pi/2 - x$)

19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_1^{64} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ (Υποδ: θέτω $u = \sqrt[6]{x}$)

20. Να δειχθεί ότι: $\int_0^\alpha x^{1940} \cdot (\alpha - x)^{1821} dx = \int_0^\alpha (\alpha - x)^{1940} \cdot x^{1821} dx$ $\alpha > 0$ (Υποδ: θέτω $u = \alpha - x$)

21. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sigma \phi x) dx$ (Υποδ: θέτω $u = \pi/2 - x$)

22. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2022 + \eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x + 2022}\right) dx$ (Υποδ: θέτω $u = \pi/2 - x$)

23. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{(\epsilon \phi x)^{\eta \mu x}}{(\sigma \phi x)^{\sigma \upsilon \nu x}}\right) dx$ (Υποδ: θέτω $u = \pi/2 - x$)

24. Να βρεθούν τα πραγματικά α, β, γ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot e^{2x} + \beta \cdot e^x + \gamma x$ να ικανοποιεί τις συνθήκες: $f(0) = -1$, $f'(\ln 2) = 31$ και $\int_0^{\ln 4} (f(x) - \gamma x) dx = \frac{39}{2}$

25. Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x_1 = \alpha$ σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με τον άξονα xx' και η εφαπτομένη στο σημείο $x_2 = \beta$ σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα xx' . Αν η δεύτερη παράγωγος της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f''(x) dx$

26. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha \cdot \eta \mu(\pi x) + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Να βρεθούν τα α και β ώστε $f'(1) = 2$ και $\int_0^2 f(x) dx = 4$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2, & x \leq 1 \\ x^2 - \alpha x + 3, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής και να υπολογιστεί το $I = \int_0^2 f(x) dx$

28. Να βρεθεί αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^1 e^{-x} \cdot x^v dx$ Μετά να υπολογιστεί το I_2 . (Υποδ: με παραγοντική)

29. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με συνεχή πρώτη παράγωγο ώστε $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$. Να υπολογιστεί η

$$\text{παράσταση } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{f(x)} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx.$$

Υπόσ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{f(x)} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot f(x) - \eta \mu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta \mu x}{f(x)} \right)' dx = \frac{\eta \mu x}{f(x)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\eta \mu \frac{\pi}{2}}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\eta \mu(0)}{f(0)} = \frac{1 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}}{3 - 0} = \textcircled{3}$$

30. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\int_0^1 \left(\int_1^2 f(t) \cdot e^x dt \right) dx = e - 1$. Να βρεθούν τα :

- $\int_1^2 f(t) dt$
- $\int_2^3 \left(\int_1^2 t \cdot f(x) dx \right) dt$

Υπόσ: α) $\int_0^1 \left(\int_1^2 f(t) e^x dt \right) dx = e - 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(e^x \int_1^2 f(t) dt \right) dx = e - 1$

$\int_1^2 f(t) dt = \kappa$ $\Rightarrow \int_0^1 e^x \cdot \kappa dx = e - 1 \Rightarrow \kappa \int_0^1 e^x dx = e - 1 \Leftrightarrow$

$\kappa [e^x]_0^1 = e - 1 \Leftrightarrow \kappa (e - 1) = e - 1 \Leftrightarrow \kappa = 1$ Άρα $\int_1^2 f(t) dt = 1$

β) $\int_2^3 \left(\int_1^2 t \cdot f(x) dx \right) dt = \int_2^3 \left(t \cdot \int_1^2 f(x) dx \right) dt$ $\int_1^2 f(x) dx = 1$

$$\int_2^3 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_2^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \textcircled{\frac{5}{2}}$$

31. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Να υπολογιστεί το

$$\int_1^3 \left(\int_0^2 \ln x \cdot f(t) dt \right) dx$$

Υπόσ: $\int_1^3 \left(\int_0^2 \ln x \cdot f(t) dt \right) dx = \int_1^3 \left(\ln x \int_0^2 f(t) dt \right) dx$ $\int_0^2 f(t) dt = 5$

$$\int_1^3 (\ln x \cdot 5) dx = 5 \cdot \int_1^3 \ln x dx = 5 \int_1^3 (x)' \ln x dx =$$

$$\left[5x \ln x \right]_1^3 - 5 \int_1^3 x \cdot (\ln x)' dx = \left[5x \ln x \right]_1^3 - 5 \int_1^3 1 dx =$$

$$15 \ln 3 - 5 \ln 1 - 5(3-1) = 15 \ln 3 - 10$$

32. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(x) = x^2 + \int_0^2 2x \cdot f(t) dt$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Υπόσ: $f(x) = x^2 + \int_0^2 2x \cdot f(t) dt = x^2 + 2x \int_0^2 f(t) dt$ $\int_0^2 f(t) dt = u$

$$x^2 + 2x \cdot u \Rightarrow f(x) = x^2 + 2u \cdot x$$

οπότε $\int_0^2 f(t) dt = u \Leftrightarrow \int_0^2 (t^2 + 2u \cdot t) dt = u \Leftrightarrow \left[\frac{t^3}{3} + 2u \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = u \Leftrightarrow$

$$\frac{8}{3} + 4u = u \Leftrightarrow 3u = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow u = -\frac{8}{9} \text{ Άρα}$$

$$f(x) = x^2 + 2\left(-\frac{8}{9}\right)x \Rightarrow \boxed{f(x) = x^2 - \frac{16}{9}x}$$

33. Έστω $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + 2} dt$ και $F(1)=0$. Να υπολογιστεί το $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{t^2 + 2} dt \right) dx$

Υπόσ: $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (x)' F(x) dx = \left[x F(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot F'(x) dx =$

$$F(1) - \int_0^1 x \cdot f(x) dx$$

$\frac{F(1)=0}{f(x) = \frac{1}{x^2+2}}$

$$- \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x^2+2} dx = - \int_0^1 \frac{x}{x^2+2} dx =$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+2)'}{x^2+2} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln(x^2+2) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 2$$

34. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει: $f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(x) dx = (\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot (f(\alpha) + f(\beta)) \text{ (Α' Δέσμη 1996)}$$

Υπόσ: $f(x) + f(a+b-x) = C \xrightarrow[x = \frac{a+b}{2}]{x=a} f(a) + f(b) = C \quad (1)$
 $\xrightarrow{x = \frac{a+b}{2}} f(\frac{a+b}{2}) = \frac{C}{2} \quad (2)$

Ισχύει: $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(a+b-x) dx = C(b-a)$

οπώς $\int_a^b f(a+b-x) dx \xrightarrow[x=a, u=b]{u=a+b-x} \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow$
 $x=b, u=a$
 $dx = -du$

2 $\int_a^b f(x) dx = C(b-a) \xrightarrow{(1), (2)} \Sigma$

35. Έστω f συνεχής και θετική στο $[0,1]$ και $F(x)$ μια παράγουσα της f με $F(0)=0$. Να δειχθεί ότι τουλάχιστον ένα ξ στο $(0,1)$ ώστε $\xi \cdot f(\xi) < F(1)$

Υπόσ: Για τη συνάρτηση $F(x)$ ισχύουν οι
 Προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.Δ.Π. άρα $\exists$ τουλάχιστον
 ένα $\xi \in (0,1)$: $\frac{F(1)-F(0)}{1-0} = F'(\xi) \Rightarrow f(\xi) = F(1) \quad (1)$
 οπώς $0 < \xi < 1 \xrightarrow{f(x) > 0} \xi \cdot f(\xi) < f(\xi) \quad (2)$
 Από (1) (2) έχω ότι $\boxed{\xi \cdot f(\xi) < F(1)}$

36. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 3}{e^x + 1} dx$

Υπόσ: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 3}{e^x + 1} dx \xrightarrow[x=0, u=1]{u=e^x, du=e^x dx} \int_1^2 \frac{u^2 + 3}{u + 1} \cdot \frac{1}{u} du =$
 $\int_1^2 \frac{u^2 + 3}{u^2 + u} du = \int_1^2 \frac{u^2 + u - u + 3}{u^2 + u} du = \int_1^2 1 du + \int_1^2 \frac{-u + 3}{u^2 + u} du =$
 $1 + \int_1^2 \frac{-u + 3}{u^2 + u} du \quad (1)$
 $\frac{-u + 3}{u^2 + u} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \Leftrightarrow -u + 3 = A(u+1) + Bu \Rightarrow$
 $A = 3, B = -4$
 Άρα (1) $1 + \int_1^2 \frac{3}{u} du + \int_1^2 \frac{-4}{u+1} du =$
 $1 + [\ln u - 4 \ln(u+1)]_1^2 = 1 + \ln 2 - 4 \ln 3 - \ln 1 + 4 \ln 2 =$
 $1 + 5 \ln 2 - 4 \ln 3.$

37. Έστω $f(x) = e^x + 2x - 1$. Να εξεταστεί αν αντιστρέφεται και να υπολογιστεί το

$$\int_0^{e+1} f^{-1}(x) dx.$$

Υπόσ: Έστω $f(x) = e^x + 2x - 1$ $A_f = \mathbb{R}$
 $f'(x) = e^x + 2 > 0$ άρα $f \uparrow$ άρα $\exists \hookrightarrow f^{-1}(x)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - 1) \xrightarrow{(0 - \infty - 1)} -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x - 1) \xrightarrow{(+\infty + \infty - 1)} +\infty$

$\Rightarrow f(A) = \mathbb{R}$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ είναι $\mathbb{R}$

$\int_0^{e+1} f^{-1}(x) dx$ $\psi = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(\psi)$ $\int_0^1 \psi f'(\psi) d\psi =$

$\frac{dx = f'(\psi) d\psi}{x=0, 0=f(\psi) \rightarrow f(0)=f(\psi) \rightarrow \psi=0}$ $\frac{f(1)=f(\psi) \rightarrow \psi=1}{x=e+1, e+1=f(\psi) \rightarrow f(1)=f(\psi) \rightarrow \psi=1}$

$[\psi f(\psi)]_0^1 - \int_0^1 f(\psi) d\psi = [\psi e^\psi + 2\psi^2 - \psi]_0^1 - [e^\psi + \psi^2 - \psi]_0^1 =$

$e + 2 - 1 - (e + 1 - 1 - 1) = e + 1 - e + 1 = 2$

38. Έστω $f(x) = e^x + x^5$ Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το $\int_1^{e+5} f^{-1}(x) dx$

39. Έστω f συνεχής στο $[1, 5]$ και $\int_2^5 f(x) dx = 500$ Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{500}{3}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 5)$ Υποδ: Θ.Μ.Τ για την $F(x)$

Υπόσ: Έστω $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ μια αρχικά της $f(x)$

για την $F(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[2, 5]$

άρα $\exists \xi \in (2, 5): F'(\xi) = \frac{F(5) - F(2)}{5 - 2} \xrightarrow{F'(x) = f(x)} f(\xi) = \frac{F(5)}{3}$

$\Rightarrow f(\xi) = \frac{\int_2^5 f(t) dt}{3} \Rightarrow f(\xi) = \frac{500}{3}$

40. Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x) dx = \kappa$ Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{\kappa}{b-a}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, b)

Υπόσ: Θ.Μ.Τ στο $[a, b]$ για την συνεχή την $f(x)$
 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. $\exists$ τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$:
 $F'(3) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \underline{F'(x) = f(x)} \quad \underline{F(a) = 0} \quad f(3) = \frac{F(b)}{b - a} \Rightarrow$
 $f(3) = \frac{\int_a^b f(t)dt}{b - a} \Rightarrow \boxed{f(3) = \frac{1}{b - a}}$

41. Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει: $\int_0^1 f(t)dt = 1$ και έστω $F(x)$ μία παράγουσα της $f(x)$ με $F(0) = 0$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο $(0, 1)$ ώστε $F(\xi) = \frac{1}{3\xi}$

Υπόσ: Έστω $g(x) = 3x F(x) - 1$, $\mu \epsilon F(x) = \int_0^x f(t)dt$
 $g(0) = -1 < 0$
 $g(1) = 3F(1) - 1 \quad \underline{F(1) = 1} \quad 3 - 1 = 2 > 0$
 Αρα από Θ.Βολζανο έχω ότι $\exists \xi \in (0, 1): g(\xi) = 0 \Rightarrow$
 $3\xi \cdot F(\xi) = 1 \Rightarrow \boxed{F(\xi) = \frac{1}{3 \cdot \xi}}$

42. Να δείξετε ότι $-2 \leq \int_0^2 \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} dx \leq \frac{14}{5}$

Υπόσ: Έστω $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$
 $f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$
 $\frac{\cancel{2x^3} + 2x + 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 4x + 2}{(x^2+1)^2}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{matrix}$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	0	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Αρα ισχύει: $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Rightarrow$
 $-1 \leq f(x) \leq \frac{7}{5} \Rightarrow$
 $\int_0^2 -1 dx \leq \int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 \frac{7}{5} dx \Rightarrow \boxed{-2 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq \frac{14}{5}}$

43. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) + f(-x) = 5$ Ναδειχθεί ότι: $\int_{-2}^2 f(x) dx = 10$

Υπόθεση: $f(x) + f(-x) = 5$ $\xrightarrow{\text{+ συνεχής}}$ $\int_{-2}^2 f(x) dx + \int_{-2}^2 f(-x) dx = \int_{-2}^2 5 dx \Rightarrow$

$\xrightarrow{\substack{-x=u \\ du=-dx}} \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^{-2} f(u) du = 5(2 - (-2)) \Rightarrow$

$\substack{X=a, u=-a \\ x=b, u=-b} \quad 2 \int_{-2}^2 f(x) dx = 20 \Rightarrow \boxed{\int_{-2}^2 f(x) dx = 10}$

44. Να δείξετε ότι $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{5+3\eta\mu^2 x} dx \leq \frac{2\pi}{5}$

Υπόθεση: $\forall x \in [0, \pi] \quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \xrightarrow{A, x \in [0, \pi]} 0 \leq \eta\mu^2 x \leq 1 \Rightarrow$

$0 \leq 3\eta\mu^2 x \leq 3 \Rightarrow 5 \leq 5+3\eta\mu^2 x \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{5+3\eta\mu^2 x} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow$

$\frac{1}{4} \leq \frac{2}{5+3\eta\mu^2 x} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{4} dx \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{5+3\eta\mu^2 x} dx \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{5} dx \Rightarrow$

$\boxed{\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{5+3\eta\mu^2 x} dx \leq \frac{2\pi}{5}}$

45. Να δείξετε ότι $\int_1^2 (x+1) dx > \int_1^2 \sqrt{2x+1} dx$

(Υπόδ: για $x > 0$ ισχύει $x^2 + 2x + 1 > 2x + 1$)

$(x+1)^2 > 2x+1 \Rightarrow x+1 > \sqrt{2x+1} \Rightarrow \int_1^2 (x+1) dx > \int_1^2 \sqrt{2x+1} dx$

46. Α) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ Τότε να δείξετε ότι : $f(x)=0$ για όλα τα x στο $[\alpha, \beta]$.

Β) Αν f συνεχής στο $[0,1]$ με $\int_0^1 f^2(x) dx + \frac{4}{3} = 4 \int_0^1 x \cdot f(x) dx$

Τότε να δείξετε ότι : $f(x)=2x$ για όλα τα x στο $[0,1]$.

Υπόσ. (Α) Έστω $f(x) \neq 0$ για κάποια $x \in [a, b]$, έστω για το $x_1 \in [a, b]$ ισχύει $f(x_1) \neq 0 \xrightarrow{f(x) \geq 0} f(x_1) > 0$

Η f είναι συνεχής άρα $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1) > 0$ άρα

η $f(x)$ είναι θετική σε μια περιοχή του x_1

και άρα η f είναι μη αρνητική ισχύει:

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad \underline{\text{άτοπο}} \quad \text{Άρα } f(x) = 0$$

$$(B) \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 4x f(x) dx + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 [f^2(x) - 4x f(x)] dx + \int_0^1 (4x^2) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (f(x) - 2x)^2 dx = 0 \xrightarrow{(f(x)-2x)^2 \geq 0} \boxed{f(x) = 2x}$$

47. Αν f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ Τότε να δείξετε ότι:

$$f(a) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(b) \cdot (b-a)$$

Υπόσ. $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[a, b]$ άρα για $a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(a) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(b) dx \Rightarrow$$

$$\boxed{f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(b)(b-a)}$$

48. Έστω f παραγωγίσιμη για $x \geq 1$ με $f(x) > 0$ και $\ln(f(x)) = f(x) - x$ για κάθε x πραγματικό αριθμό

➤ Να βρεθεί το $f(1)$

➤ Να υπολογιστεί το $\int_1^2 f(x) dx$ ως συνάρτηση του $f(2)$.