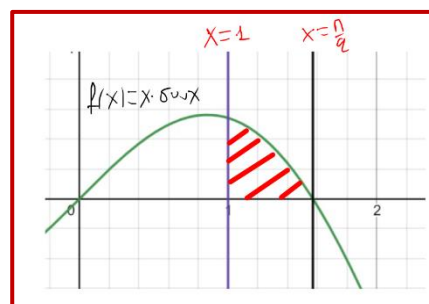


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx' , την γραφική παράσταση της $f(x)=3/4x+8$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=3$.
2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx' , την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2-2x+8$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.
3. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx' , την γραφική παράσταση της $f(x)=-x^2+3x-20$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.
4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx' , την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2-11x+30$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

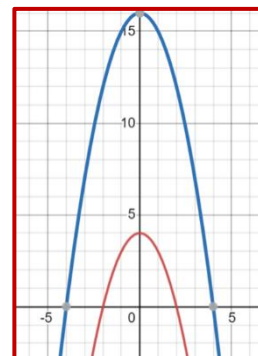
5. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx' , την γραφική παράσταση της $f(x)=x\sin x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\pi/2$.



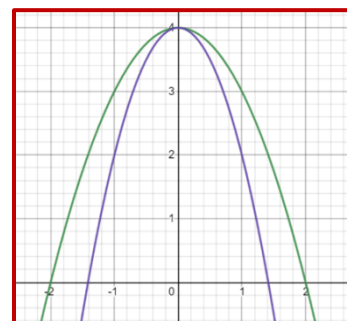
6. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx' , την γραφική παράσταση της $f(x)=1/4x^3$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=2$.
7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα των $f(x)=2x$, και $g(x)=x^2$.
8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{2x^2}$. Να παραστήσετε γραφικά την f . Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περιορίζεται από το διάγραμμα της f , την ευθεία $\psi=x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ ($\lambda>1$)
9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}$. Να παραστήσετε γραφικά την f και g . Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα των δύο παραπάνω συναρτήσεων και των ευθειών $x=1$ και $x=\lambda$ ($\lambda>1$)

10. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα xx' , την γραφική παράσταση της $f(x) = 3^x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

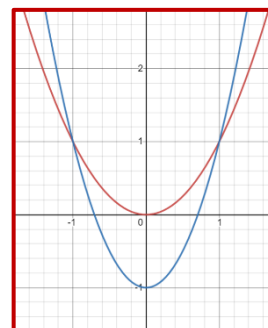
11. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα των $f(x) = -x^2 + 4$, και $g(x) = -x^2 + 16$ και τον άξονα xx'



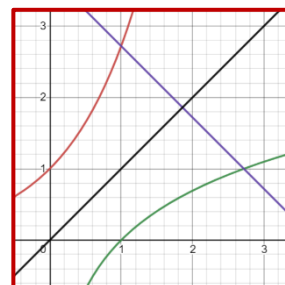
12. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα των $f(x) = -x^2 + 4$, και $g(x) = -2x^2 + 4$ και τον άξονα xx'



13. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα των $f(x) = x^2$, και $g(x) = 2x^2 - 1$



14. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τα διαγράμματα των $f(x) = e^x$, και $g(x) = \ln x$ της ευθείας $\psi = -x + e + 1$ και τους άξονες Ox , Oy



Υπόδειξη: Επειδή οι γραφικές παραστάσεις

των e^x , $\ln x$ είναι συμμετρικές ως προς τη $y = x$ διχοτόμο αρκεί να

υπολογιστεί το γραμμοσυνισμάτινο εμβαδό (E)

$$\begin{cases} \psi = e^x \\ \psi = -x + e + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = -x + e + 1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ προφανής λύση}$$

Εστω $h(x) = e^x + x - e - 1$, $h'(x) = e^x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

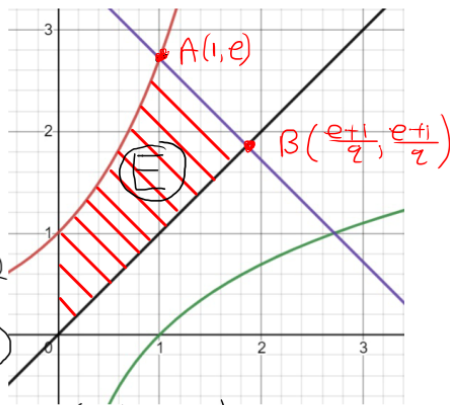
Άρα η λύση είναι μοναδική (ηλ)

συνεπώς το σημείο τομής είναι το $A(1, e)$

$$\begin{cases} \psi = x \\ \psi = -x + e + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x + e + 1 \\ \psi = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{e+1}{2} \\ \psi = \frac{e+1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}\right)$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 e^x dx + \int_1^{\frac{e+1}{2}} (-x + e + 1 - x) dx = \dots$$

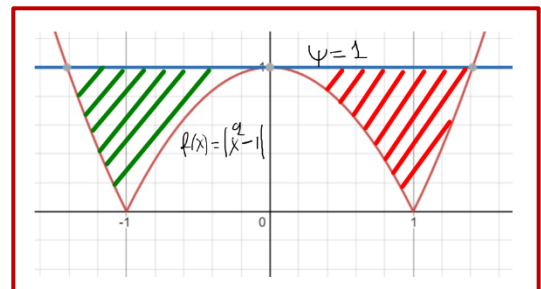
Επομένως το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $9E$



15. Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που

περικλείεται από το διάγραμμα της

$f(x) = |x^2 - 1|$, και της ευθείας $\psi = 1$.



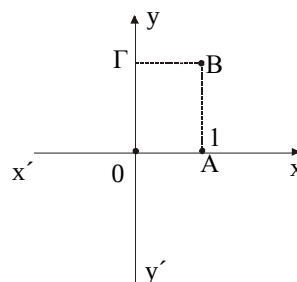
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

16. Προφανώς $\int_{-2}^1 2x^2 dx > 0$. Αλλά $I = \int_{-2}^1 2x^2 dx = \int_{-2}^1 x \cdot 2x dx$ και θέτουμε

$u = x^2$, οπότε $du = 2x dx$, ενώ για $x = 1$ είναι $u = 1$ και για $x = -2$ είναι $u = 4$. Άρα $I =$

$$\int_4^1 \sqrt{u} du = - \int_1^4 \sqrt{u} du < 0. \text{ Πού βρίσκεται το λάθος; Στο } [-2, 1] \text{ η } g(x) = x^2 \text{ δεν είναι 1-1}$$

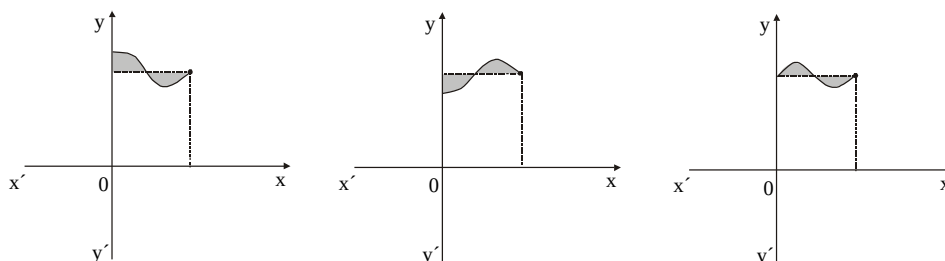
17. α) Να κατασκευάσετε το τμήμα μιας καμπύλης με αρχή πάνω στον άξονα y' και τέλος το B ώστε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και μεταξύ των ευθειών $y = 0$ και $x = 1$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου OABΓ. Είναι δυνατόν η καμπύλη να παριστάνει γνησίως μονότονη συνάρτηση;



β) Να παρατηρήσετε ότι η πρόταση: «Αν η f είναι παραγωγίσμη στο $[0, 1]$ και ισχύει $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$ δείξτε ότι η f διαθέτει ένα τουλάχιστον σημείο τοπικού ακροτάτου στο διάστημα $(0, 1)$ » απαντά στο ερώτημα (α) και να την αποδείξετε.

Υποδ:

Μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις καμπυλών που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του ερωτήματος και γίνεται αντιληπτό ότι δεν μπορεί η καμπύλη να παριστάνει μια γνησίως μονότονη συνάρτηση, άρα θα παρουσιάζει ένα τουλάχιστον σημείο τοπικού ακροτάτου (εφόσον προέρχεται από παραγωγίσμη συνάρτηση).



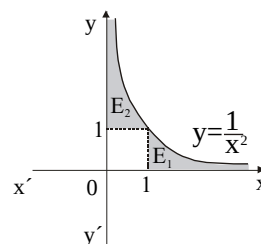
β) Ας υποθέσουμε ότι $f(x) > 0$ στο $[0, 1]$. Αν επιχειρήσουμε να «μεταφράσουμε» τα σύμβολα μέσα στο πλαίσιο που καθορίζει το σχήμα της (α), τότε $\int_0^1 f(x) dx$ είναι «το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και μεταξύ των ευθειών $y = 0$ και $x = 1$ ».

$f(1) = f(1) \cdot 1 = f(1) \cdot OA = AB \cdot OA$ είναι «το εμβαδόν του ορθογωνίου OABΓ», άρα η ισότητα $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$ έχει την ίδια σημασία που προκύπτει από τα σχήματα του ερωτήματος (α). Η τυπική απόδειξη θα μπορούσε να έχει ως εξής: Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε θα είναι και 1-1. Έστω $F(x)$ η αρχική της $f(x)$ τότε ισχύει:

$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = f(1)$ Από Θ.Μ.Τ για την $F(x)$ στο $[0, 1]$ έχω ότι

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1} = f(1) \Rightarrow f(\xi) = f(1) \text{ δηλαδή } f(\xi) = f(1), \text{ άρα } \xi = 1 \text{ (άτοπο).}$$

18. α) Στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1, E_2 .



β) Προσπαθήστε τώρα να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, π.χ.:

για το E_1 : θεωρήστε $\lambda > 1$ και υπολογίστε

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2} dx \text{ και}$$

για το E_2 : $0 < \lambda < 1$ και υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β); Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματά σας γεωμετρικά;

Υποδ:

α) Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι $E_1 = E_2$

$$\beta) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = 1 \quad \text{αυτό είναι το } E_1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = +\infty \quad \text{αυτό εκφράζει το μέγεθος του } E_2$$

Μια πρόταση για γεωμετρική ερμηνεία είναι η παρακάτω:

Αν το χωρίο E_1 διαιρεθεί σε ορθογώνια με πολύ μικρή βάση, τότε τα ύψη των ορθογώνιων μικραίνουν με τέτοιο ρυθμό, ώστε αν και το πλήθος είναι θεωρητικά άπειρο, το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι πραγματικός αριθμός, πράγμα που δεν συμβαίνει στο E_2 .

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + e^{-x}$, $g(x) = x - e^{-x}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ και της $f(x) - x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.

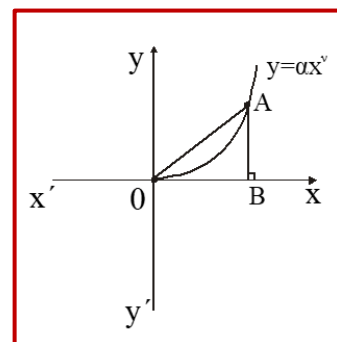
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$, $y = x$.

$$\alpha) f(x) - g(x) = 2e^{-x} > 0 \text{ και } f(x) - x = e^{-x} > 0$$

$$\beta) E = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = 2(1 - e^{-2})$$

$$\gamma) E = \int_0^2 (f(x) - x) dx = 1 - e^{-2}$$

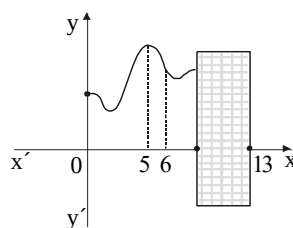
20. Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^v$, $a > 0$, $x \geq 0$ και τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_1, 0)$. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία η C να χωρίζει το τρίγωνο OAB σε δύο ισεμβαδικά χωρία;



Το OAB έχει εμβαδόν $\frac{1}{2} OB \cdot AB = \frac{1}{2} x_1 \cdot ax_1^v$, άρα θα πρέπει

$$\int_0^{x_1} ax^v dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x_1 \cdot ax_1^v \right), \text{ άρα } v = 3 \text{ και } f(x) = ax^3$$

21. Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο $[0, 13]$ και έχει παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως. Να εκτιμήσετε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων:



$$\alpha) \int_5^{12} f'(x) dx$$

$$\beta) \int_0^{13} f(x) dx$$

$$\gamma) \int_5^6 f''(x) dx$$

$$\alpha) \int_5^{12} f'(x) dx = f(12) - f(5) < 0, \text{ αφού } f(5) \text{ η μέγιστη τιμή}$$

$$\beta) \int_0^{13} f(x) dx > 0, \text{ αφού το εμβαδόν της ετικέτας κάτω από τον } x'x \text{ είναι αρκετά μικρότερο από αυτό που φαίνεται να βρίσκεται πάνω από τον } x'x$$

$$\gamma) \int_5^6 f''(x) dx = f'(6) - f'(5) \text{ όμως } f'(5) = 0 \text{ και } f'(6) < 0, \text{ αφού στο σημείο αυτό η καμπύλη «κατέρχεται»}$$