

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΝΝΟΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

[Ενότητα Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης του κεφ.1.2 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{4-|3-x|}}{\ln x}$.

Λύση

Βήμα 1^ο: Βάζω τους απαραίτητους περιορισμούς για το x . Δηλαδή:

α) $x > 0$.

β) $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \ln 1 \stackrel{1-1}{\Rightarrow} x \neq 1$.

γ) $4 - |3 - x| \geq 0 \Leftrightarrow |3 - x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7$.

Βήμα 2^ο: Συναληθεύουμε τους περιορισμούς και λαμβάνουμε το πεδίο ορισμού:
 $x \in (0, 1) \cup (1, 7]$.

Άρα το $D_f = (0, 1) \cup (1, 7]$.

Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - 3^{-x^2 - 2x - 3}}$.

Λύση

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού θέτουμε αρχικά τους απαραίτητους περιορισμούς, δηλαδή

$$1 - 3^{-x^2 - 2x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow 3^{-x^2 - 2x - 3} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 3 \leq 0 \text{ η οποία ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta < 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Αρχικά απαιτούμε η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική.

Η επίλυση της εκθετικής ανισότητας πραγματοποιείται με τη χρήση μονοτονίας και κατόπιν λύνουμε την εμφανιζόμενη ανισότητα β' βαθμού χρησιμοποιώντας τη Διακρίνουσα του τριωνύμου και το πρόσημο του τριωνύμου.

Παράδειγμα 3.

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + 5x - 6$. Να βρεθούν:

- α) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- β) Τα σημεία τομής των C_f και C_g με τους άξονες xx' , yy' .
- γ) Τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g .
- δ) Τα διαστήματα στα οποία η C_g είναι κάτω από τον xx' .

Λύση

α) Κατ' αρχήν οι f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ διότι και οι δύο είναι πολυωνυμικές. Δηλαδή $D_f = D_g = \mathbf{R}$.

Τα κοινά σημεία των C_f, C_g τα βρίσκω από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, δηλαδή:

$$x^3 + x - 2 = x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4) = 0$$

δηλαδή: $x = 1$ ή $x = -2$ ή $x = 2$.

Άρα τα κοινά σημεία είναι: $A(1,0)$, $B(-2,-12)$, $\Gamma(2,8)$.

β) Τα κοινά σημεία της C_g και C_f με τους άξονες τα βρίσκω από τις λύσεις των εξισώσεων:

Με τον xx' : $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -6$. Άρα $\Delta(1,0)$ και $E(-6,0)$.

Με τον yy' : $g(0) = y \Rightarrow y = -6$. Άρα $Z(0,-6)$.

Με τον xx' : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow$ με Horner βρίσκω ότι:

$$f(x) = (x-1)(x^2 + x + 2) \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα $K(1,0)$.

Με τον yy' : $f(0) = y \Rightarrow y = -2$. Άρα $\Lambda(0,-2)$.

γ) Τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης $f(x) > g(x)$, δηλαδή

$$x^3 + x - 2 > x^2 + 5x - 6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2-4) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1 \text{ ή } x > 2.$$

Άρα η C_f είναι πάνω από τη C_g στο $(-2,1) \cup (2,+\infty)$.

δ) Τα διαστήματα στα οποία η C_g είναι κάτω από τον άξονα xx' προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης $g(x) < 0$, δηλαδή

$$x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+6) < 0 \Leftrightarrow -6 < x < 1.$$

Επομένως η C_g είναι κάτω από τον άξονα xx' στο $(-6,1)$.

Παράδειγμα 4.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f όταν ισχύει $f(2x-1) = 4x^2 - 2x - 5$ (1)
για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Λύση

Θέτουμε: $2x-1 = \omega \Leftrightarrow 2x = \omega+1 \Leftrightarrow x = \frac{\omega+1}{2}$, με $\omega \in \mathbf{R}$.

Αφού η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbf{R}$ θα ισχύει και για $x = \frac{\omega+1}{2}$ (2). Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$f\left(2 \cdot \frac{\omega+1}{2} - 1\right) = 4\left(\frac{\omega+1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\omega+1}{2}\right) - 5 \Leftrightarrow$$

$$f(\omega) = (\omega+1)^2 - (\omega+1) - 5 \Leftrightarrow f(\omega) = \omega^2 + \omega - 5$$

Άρα $f(x) = x^2 + x - 5$, $x \in \mathbf{R}$.

Παράδειγμα 5.

Δίδονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

Ναδειχθεί ότι $f \neq g$ και να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

Λύση

Βρίσκουμε τα D_f, D_g .

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} x-1 \neq 0 \\ \frac{x}{x-1} \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x(x-1) \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \geq 1 \text{ ή } x \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 1 \\ \text{ή} \\ x \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty).$$

$$\beta) \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow D_g = (1, +\infty).$$

Άρα $D_f \neq D_g \Leftrightarrow f \neq g$. Το ευρύτερο όμως υποσύνολο του $\mathbf{R}$ που ορίζονται οι δύο συναρτήσεις είναι το $E = D_f \cap D_g = (1, +\infty)$.

$$\text{Οπότε για κάθε } x \in (1, +\infty) : f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = g(x).$$

Άρα $f = g$.

Παράδειγμα 6.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 2}$ και $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

Λύση

Βρίσκουμε τα D_f , D_g . (α) Πρέπει $x^2 + |x| - 2 \geq 0$ (1)

Θέτουμε $|x| = y \geq 0$ οπότε η (1) γράφεται: $y^2 + y - 2 \geq 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και -2, και η ανίσωση αληθεύει για $y \geq 1$ ή $y \leq -2$.

Επειδή όμως $y \geq 0$, ισχύει μόνο $y \geq 1$.

Άρα $|x| \geq 1$ δηλ. $x \geq 1$ ή $x \leq -1$

Άρα $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(β) $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Άρα $D_g = [-2, 2]$.

Άρα $A = D_f \cap D_g = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

Επομένως ορίζονται οι πράξεις των συναρτήσεων f, g ως εξής:

$$(f + g)(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 2} + \sqrt{4 - x^2}$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 2} - \sqrt{4 - x^2}$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 2} \cdot \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{(x^2 + |x| - 2) \cdot (4 - x^2)}$$

με πεδίο ορισμού για τις τρεις πράξεις το A και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^2 + |x| - 2}}{\sqrt{4 - x^2}}$ με $x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού του πηλίκου είναι: $D_{\frac{f}{g}} = (-2, -1] \cup [1, 2)$.

Παράδειγμα 7.

Δίδονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g(x) = \ln x$.

Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$

Λύση

Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των f, g

$$(a) \quad 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow A = D_f = (-\infty, 2]$$

$$(b) \quad x > 0 \Rightarrow B = D_g = (0, +\infty)$$

Βρίσκουμε κατ' αρχήν το:

$$D_{g \circ f} = \{x \in A : f(x) \in B\} = \{x \leq 2 : \sqrt{2-x} > 0\} = (-\infty, 2).$$

$$\text{Άρα } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2-x}) = \ln \sqrt{2-x} = \ln(2-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(2-x).$$

Παράδειγμα 8.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$

iii. $f(x) = \log(|x| - 3)$

iv. $f(x) = 2^{x-\sqrt{x}}$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται, αν και μόνο αν $x^2 - 1 \neq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -1.

Έτσι έχουμε:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}.$$

ii. Η συνάρτηση f ορίζεται, αν και μόνο αν $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 3.

Έτσι η ανίσωση αληθεύει, αν και μόνο αν $x \leq 1$ ή $x \geq 3$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$D_f = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty).$$

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν $|x| - 3 > 0$ ή $|x| > 3$ ή $(x < -3$ ή $x > 3)$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

iv. Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν $x \geq 0$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f = [0, +\infty)$.

Μεθοδολογία

Δίνεται μια συνάρτηση f .

i. Αν $f(x) = P(x)$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο, τότε $D_f = \mathbb{R}$.

ii. Αν $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, όπου h, g συναρτήσεις, τότε $D_f = \{x \in D_h \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

iii. Αν $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, όπου g συνάρτηση, τότε $D_f = \{x \in D_g \mid g(x) \geq 0\}$.

iv. Αν $f(x) = \log_{\alpha} g(x)$, $0 < \alpha \neq 1$, όπου g συνάρτηση, τότε $D_f = \{x \in D_g \mid g(x) > 0\}$.

v. Αν $f(x) = \alpha^{g(x)}$, $0 < \alpha \neq 1$, όπου g συνάρτηση, τότε $D_f = D_g$.

Παράδειγμα 9.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i. $f(x) = \log_{4-|x|}(x-2)$

ii. $f(x) = (\sqrt{x}-1)^{\sqrt{x}-2}$

iii. $f(x) = \varepsilon\varphi(2x - \frac{\pi}{6})$

iv. $f(x) = \sigma\varphi(x - \frac{\pi}{6})$

Λύση

i. Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν

$$\left. \begin{array}{l} x-2 > 0 \\ 4-|x| > 0 \\ 4-|x| \neq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2 \\ |x| < 4 \\ |x| \neq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2 \\ -4 < x < 4 \\ x \neq \pm 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ και } 2 < x < 4$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (2,3) \cup (3,4)$.

ii. Η συνάρτηση f ορίζεται, αν και μόνο αν

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 1$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (1, +\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν $2x - \frac{\pi}{6} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Έτσι έχουμε:

$$2x - \frac{\pi}{6} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

iv. Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν $x - \frac{\pi}{6} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Έτσι έχουμε:

$$x - \frac{\pi}{6} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Μεθοδολογία

Δίνεται μια συνάρτηση f .

i. Αν $f(x) = \log_{g(x)} h(x)$, όπου h, g συναρτήσεις, τότε

$$D_f = \{x \in D_h \cap D_g \mid h(x) > 0 \text{ και } 0 < g(x) \neq 1\}.$$

ii. Αν $f(x) = (g(x))^{h(x)}$, όπου h, g συναρτήσεις, τότε $D_f = \{x \in D_h \cap D_g \mid g(x) > 0\}$.

iii. Αν $f(x) = \eta\mu g(x)$, όπου g συνάρτηση, τότε $D_f = D_g$.

iv. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu g(x)$, όπου g συνάρτηση, τότε $D_f = D_g$.

v. Αν $f(x) = \varepsilon\varphi g(x)$, όπου g συνάρτηση, τότε $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in D_g \mid g(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

vi. Αν $f(x) = \sigma\varphi g(x)$, όπου g συνάρτηση, τότε $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in D_g \mid g(x) = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Παράδειγμα 10.

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$.

- i. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 5 είναι τιμή της f .
- ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -3 είναι τιμή της f .

Λύση

i. Επιλύουμε την εξίσωση $f(x) = 5$ στο σύνολο D_f .

Έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 5 \\ x \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + \sqrt{x-1} = 5 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 3 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 = 9 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 10$$

Άρα ο 5 είναι τιμή της f για $x=10$, δηλαδή $f(10) = 5$.

ii. Επιλύουμε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο σύνολο D_f .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -3 \\ x \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + \sqrt{x-1} = -3 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = -5 \\ x \geq 1 \end{array} \right\}$$

Η εξίσωση δεν έχει λύση στο D_f , αφού είναι $\sqrt{x-1} \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

Μεθοδολογία

Για να εξετάσουμε ότι ένας αριθμός y είναι τιμή της f , θα πρέπει η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει λύση στο D_f .

Παράδειγμα 11.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^2 - x$

ii. $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Λύση

i. Η f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού A της f είναι $A = \mathbb{R}$.

Επιλύουμε την εξίσωση $y = f(x)$ στο σύνολο $A = \mathbb{R}$, με άγνωστο το x . Έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - x - y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Για να έχει η (1) λύσεις στο $A = \mathbb{R}$ θα πρέπει:

$$(-1)^2 + 4y \geq 0 \quad \text{ή} \quad 1 + 4y \geq 0 \quad \text{ή} \quad y \geq -\frac{1}{4}$$

Άρα για κάθε $y \geq -\frac{1}{4}$ η (1) έχει λύση στο A . Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

ii. Η f ορίζεται αν και μόνον αν $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Επιλύουμε την εξίσωση $y = f(x)$ στο $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, με άγνωστο το x . Έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x}{x-2} \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y(x-2) = x \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (y-1)x = 2y \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

- Έστω $y = 1$.

Αν θέσουμε στην (1) όπου $y=1$ τότε η (1) γίνεται: $0x=2$ που είναι αδύνατη. Άρα $y = 1 \notin f(A)$.

- Έστω $y \neq 1$ τότε $x = \frac{2y}{y-1}$.

$$x \in A \Leftrightarrow \frac{2y}{y-1} \neq 2.$$

Είναι $\frac{2y}{y-1} = 2 \Leftrightarrow 2y = 2y - 2 \Leftrightarrow 0y = -2$ αδύνατη. Άρα για κάθε $y \neq 1$ ο αριθμός $\frac{2y}{y-1} \in A$.

Άρα κάθε $y \neq 1$ είναι τιμή της f . Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Μεθοδολογία

Για να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A , βρίσκουμε τους πραγματικούς αριθμούς y , για τους οποίους η εξίσωση $y=f(x)$ με άγνωστο το x έχει λύση στο σύνολο A .

Παράδειγμα 12.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπο $f(x) = \log(5 - x)$ και $g(x) = 1 + \log x$.

- i. Εξετάστε αν η C_f τέμνει τους άξονες.
- ii. Εξετάστε αν οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν κοινά σημεία.

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται, αν και μόνο αν $5 - x > 0$.

Είναι:

$$5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5)$$

Επομένως το $D_f = (-\infty, 5)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται, αν και μόνο αν $x > 0$.

Επομένως το $D_g = (0, +\infty)$.

- i. Το $0 \in D_f$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \log 5)$.

Επειδή:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ x \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \log(5-x) = 0 \\ x < 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 5-x = 1 \\ x < 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4 \\ x < 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 4$$

Το 0 είναι τιμή της f άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(4, 0)$.

$$\text{ii. } \left. \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ x \in D_f \cap D_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \log(5-x) = 1 + \log x \\ x \in (0, 5) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \log(5-x) - \log x = 1 \\ x \in (0, 5) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \log \frac{5-x}{x} = 1 \\ x \in (0, 5) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5-x}{x} = 10 \\ x \in (0, 5) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 5-x = 10x \\ x \in (0, 5) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 11x = 5 \\ x \in (0, 5) \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{5}{11}$$

$$f\left(\frac{5}{11}\right) = \log\left(5 - \frac{5}{11}\right) = \log \frac{50}{11}$$

Άρα οι C_f και C_g έχουν ένα κοινό σημείο το $\Gamma\left(\frac{5}{11}, \log \frac{50}{11}\right)$.

Μεθοδολογία

- i. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ αν και μόνο αν το $0 \in D_f$.
- ii. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν το 0 είναι τιμή της f .
- iii. Οι C_f και C_g έχουν κοινά σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει λύση στο σύνολο $D_f \cap D_g$.

Παράδειγμα 13.

- i. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- ii. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{x+2}$ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g με $g(x) = x$.

Λύση

i. Η f ορίζεται αν και μόνο αν $x \neq 0$. Άρα $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ x \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{x^2-1}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x(x^2-1) > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 1$ είναι οι αριθμοί 1 και -1 και το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	○	○	+

Για να βρούμε το πρόσημο του γινομένου $x(x^2 - 1)$ κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2-1	+	○	-	○	+
x	-	-	○	+	+
$x(x^2-1)$	-	○	○	○	+

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ αν $-1 < x < 0$ ή $x > 1$.

ii. Η f ορίζεται αν και μόνο αν $x + 2 \geq 0$.

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

Άρα $D_f = [-2, +\infty)$.

Είναι $D_g = \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ x \in D_f \cap D_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+2} < x \\ x \geq -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x+2 < x^2 \\ x > 0 \\ x \geq -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

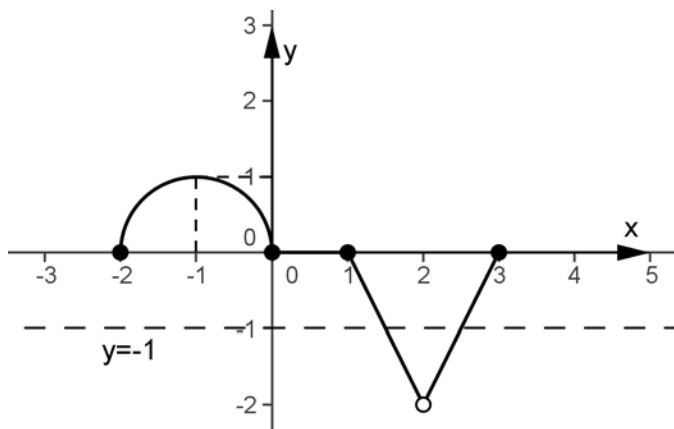
$$\left. \begin{array}{l} x^2 - x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x < -1 \text{ ή } x > 2 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 2$$

Μεθοδολογία

- i. Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f , ώστε η C_f να βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ (αντίστοιχα κάτω από τον άξονα $x'x$), βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$, $x \in D_f$ (αντίστοιχα της ανίσωσης $f(x) < 0$, $x \in D_f$).
- ii. Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f , που βρίσκονται πάνω από τα σημεία της C_g με την ίδια τετμημένη (αντίστοιχα κάτω από τα σημεία της C_g με την ίδια τετμημένη) βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$, $x \in D_f \cap D_g$ (αντίστοιχα της ανίσωσης $f(x) < g(x)$, $x \in D_f \cap D_g$).

Παράδειγμα 14.

Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω:



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να εξετάσετε αν το -1 είναι τιμή της f .
- iii. Να βρείτε το $f(-1)$.
- iv. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f .
- v. Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- vi. Να επιλύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [-2, 2) \cup (2, 3]$.
- ii. Η ευθεία $y = -1$ τέμνει τη C_f , άρα το -1 είναι τιμή της f .
- iii. $f(-1) = 1$.
- iv. Το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = (-2, 1]$.
- v. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι: $\{-2, 3\} \cup [0, 1]$.
- vi. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι: $(-2, 0)$.

Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $f(x) < 0$ είναι:
 $(1, 2) \cup (2, 3)$.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f . Τότε έχουμε:

- i. Το πεδίο ορισμού A της f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων C_f .
- ii. Το σύνολο τιμών $f(A)$ της f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f .
- iii. Για να βρούμε την τιμή της f στο x_0 , δηλαδή το $f(x_0)$, βρίσκουμε την τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ με την C_f .
- iv. Για να εξετάσουμε αν ο αριθμός β είναι τιμή της f , θα πρέπει η ευθεία $y = \beta$ να έχει κοινά σημεία με την C_f .
- v. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.
- vi. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $f(x) > 0$ (αντίστοιχα $f(x) < 0$) είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f που έχουν θετική (αντίστοιχα αρνητική) τεταγμένη, δηλαδή το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω (αντίστοιχα κάτω) από τον άξονα $x'x$.

Παράδειγμα 15.

Να παραστήσετε γραφικά κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις.

i. $f(x) = |\ln x|$

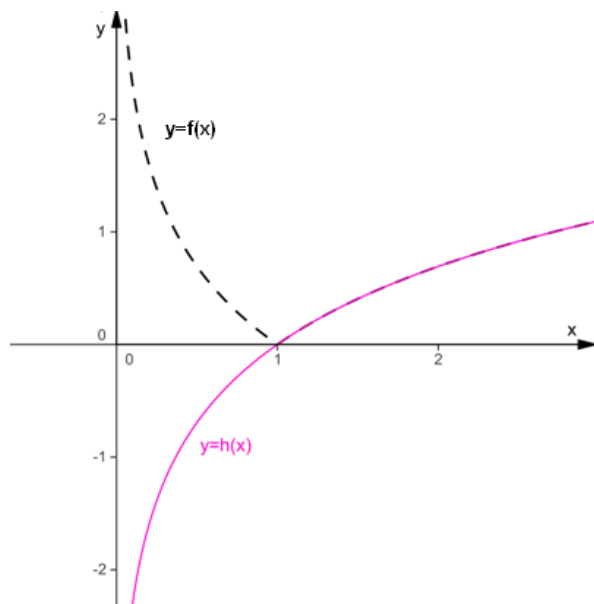
ii. $g(x) = |\ln(x - 1)|$

iii. $\varphi(x) = |\ln x| + 1$

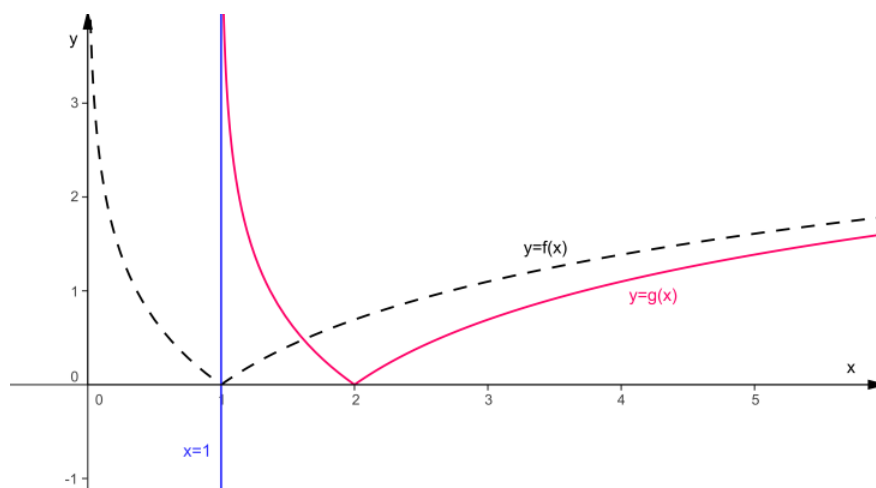
iv. $\psi(x) = |\ln(x - 1)| + 1$

Λύση

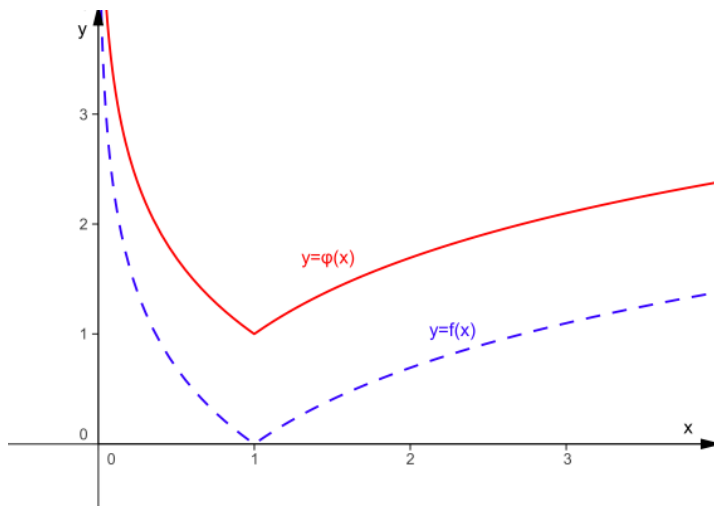
i. Αρχικά παριστάνουμε γραφικά την $h(x) = \ln x$ και έπειτα την $f(x) = |h(x)|$.



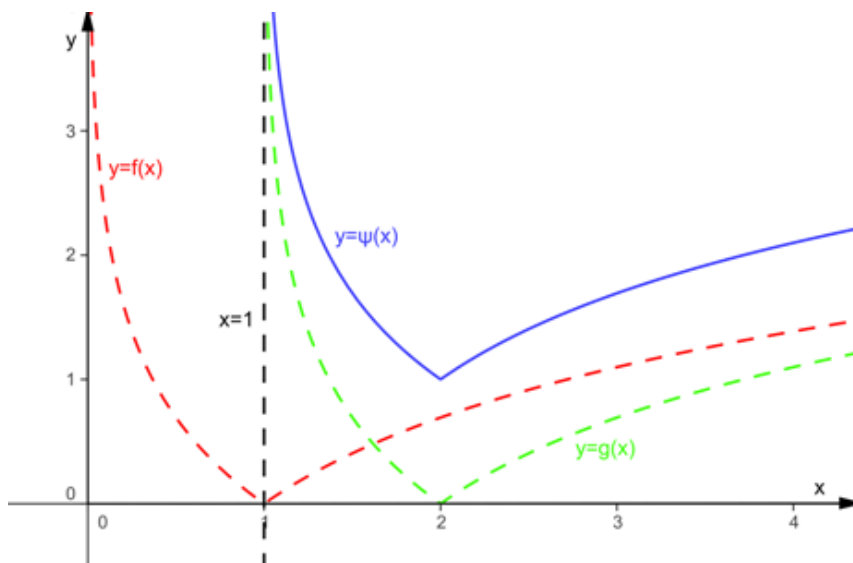
ii. Επειδή $g(x) = f(x - 1)$, η γραφική παράσταση της g προκύπτει αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.



iii. Επειδή $\varphi(x) = f(x) + 1$, η γραφική παράσταση της φ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά μια μονάδα κατακόρυφα προς τα πάνω.



iv. Επειδή $\psi(x) = f(x - 1) + 1 = g(x) + 1$, η γραφική παράσταση της ψ προκύπτει, αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά μια μονάδα δεξιά και στη συνέχεια μια μονάδα κατακόρυφα προς τα πάνω.



Μεθοδολογία

- i. Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x - c)$ με $c > 0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά c μονάδες δεξιά.
- ii. Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x + c)$ με $c > 0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά c μονάδες αριστερά.
- iii. Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) - c$ με $c > 0$ προκύπτει, αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά c μονάδες κατακόρυφα προς τα κάτω.

- iv. Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) + c$ με $c > 0$ προκύπτει, αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της f κατά c μονάδες κατακόρυφα προς τα πάνω.
- v. Τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της C_f , που βρίσκονται κάτω από αυτόν, αποτελούν την γραφική παράσταση της $|f|$.

Παράδειγμα 16.

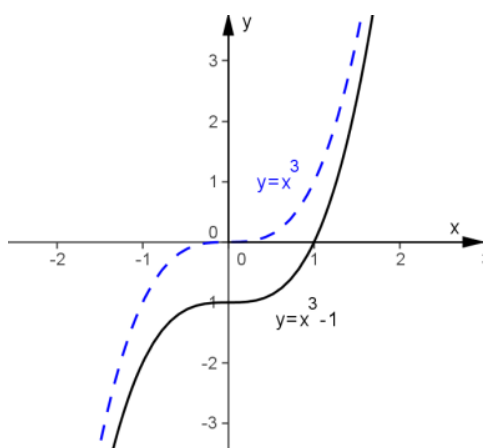
Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 1$.

Να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις:

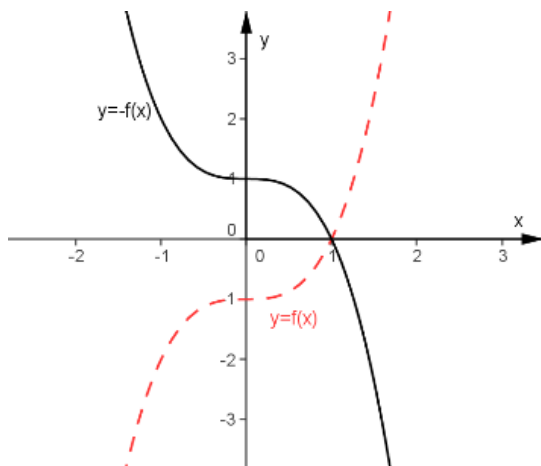
- i. $y = f(x)$
- ii. $y = -f(x)$
- iii. $y = f(-x)$
- iv. $y = -f(-x)$
- v. $y = |f(x)|$

Λύση

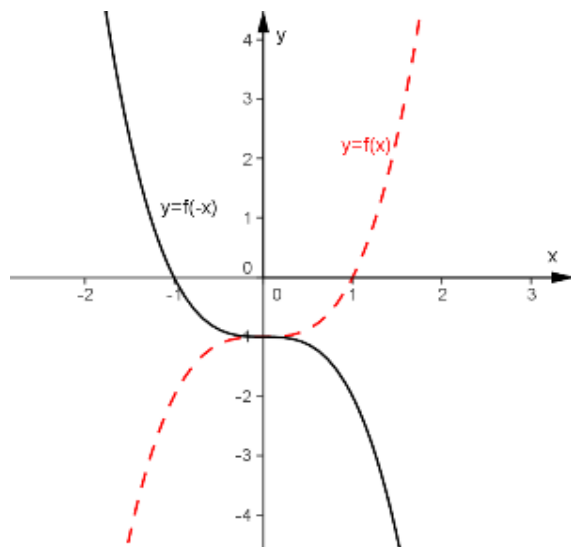
i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = f(x)$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = x^3$ κατά μία μονάδα προς τα κάτω.



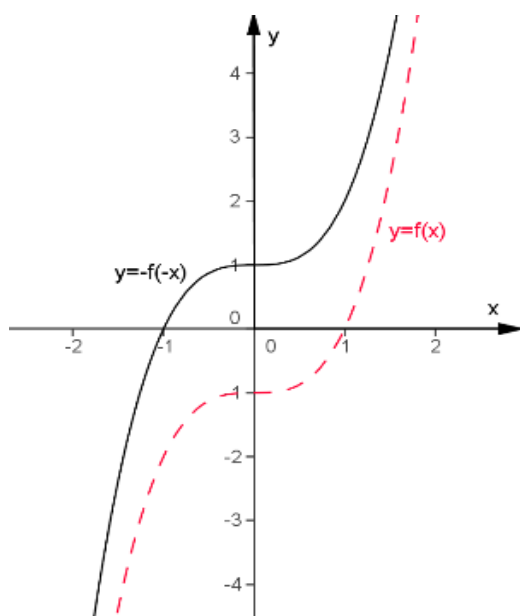
ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = -f(x)$ προκύπτει, αν θεωρήσουμε τη συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.



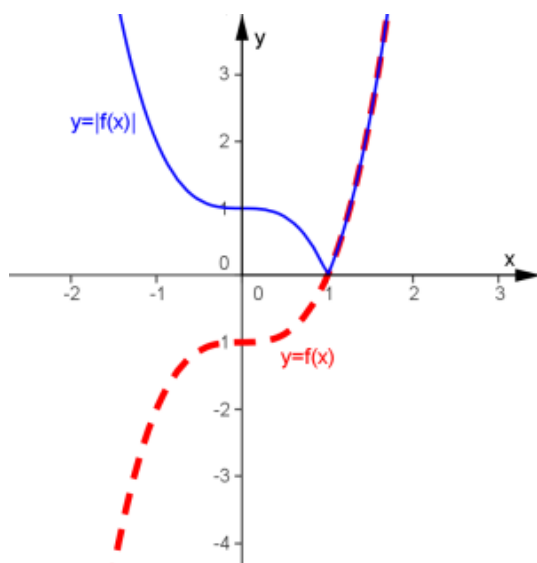
iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = f(-x)$ προκύπτει αν θεωρήσουμε τη συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$.



iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = -f(-x)$ προκύπτει αν θεωρήσουμε τη συμμετρική της C_f ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς.



ν. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = |f(x)|$ είναι:



Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$ τότε για τη C_f έχουμε:

- i. Η συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$ έχει τύπο $y = -f(x)$.
- ii. Η συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ έχει τύπο $y = f(-x)$.
- iii. Η συμμετρική της C_f ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς έχει τύπο $y = -f(-x)$.

Παράδειγμα 17.

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + x$, $g(x) = x + \sqrt{x} - 1$

ii. $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{|x-1|}$, $g(x) = \sqrt{|x+2|} + \sqrt{x-1}$

Λύση

i. Είναι $D_f = [0, +\infty)$ και $D_g = [0, +\infty)$. Άρα $D_f = D_g$.

Για $x \geq 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + x = \frac{\sqrt{x}^2 - 1}{\sqrt{x}+1} + x = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} + x = \sqrt{x} - 1 + x = g(x)$$

Άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \geq 0$ και επομένως $f = g$.

ii. Είναι $D_f = [-2, +\infty)$ και $D_g = [1, +\infty)$. Άρα $D_f \neq D_g$. Ωστόσο $D_f \cap D_g = [1, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 1$ έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{|x-1|} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{|x+2|} + \sqrt{x-1} = g(x)$$

Άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[1, +\infty)$. Επομένως οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο $[1, +\infty)$.

Μεθοδολογία

1. Για να δείξουμε ότι δυο συναρτήσεις f και g είναι ίσες πρέπει και αρκεί να ισχύουν τα εξής:

i) $D_f = D_g$ και ii) $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D_f = D_g$

2. Αν $D_f \neq D_g$ τότε $f \neq g$. Όμως αναζητούμε το ευρύτερο υποσύνολο Γ του συνόλου $D_f \cap D_g$ ώστε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Gamma$.

Θα λέμε τότε ότι $f = g$ στο σύνολο Γ .

3. Αν υπάρχει $x \in D_f \cap D_g$ ώστε $f(x) \neq g(x)$ τότε $f \neq g$.

Παράδειγμα 18.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{3-x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $3f$.

Λύση

Η f ορίζεται αν και μόνο αν $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Άρα $D_f = [1, +\infty)$.

Η g ορίζεται αν και μόνο αν $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Άρα $D_g = (-\infty, 3]$. Θεωρούμε την τομή $D_f \cap D_g = [1, 3]$.

Έτσι έχουμε:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}, \text{ για κάθε } x \in [1, 3]$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{3-x}, \text{ για κάθε } x \in [1, 3]$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}, \text{ για κάθε } x \in [1, 3]$$

Για να ορίσουμε το πηλίκο $\frac{f}{g}$, εξετάζουμε αν το σύνολο $\Gamma = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in D_f \cap D_g \\ g(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{3-x} \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ x \neq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [1, 3)$$

Άρα το σύνολο $\Gamma \neq \emptyset$. Το σύνολο Γ είναι το σύνολο ορισμού της $\frac{f}{g}$. Έτσι έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}, \text{ για κάθε } x \in [1, 3).$$

Η συνάρτηση $3f$ έχει πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της f . Έτσι έχουμε:

$$(3f)(x) = 3f(x) = 3\sqrt{x-1}, \text{ για κάθε } x \geq 1.$$

Μεθοδολογία

Για να ορίζονται οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, θα πρέπει το σύνολο $D_f \cap D_g$ να μην είναι το κενό σύνολο. Το πεδίο ορισμού των τριών αυτών συναρτήσεων είναι το σύνολο $D_f \cap D_g$. Οι τύποι των συναρτήσεων αυτών είναι αντίστοιχα οι εξής:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

Για να ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ θα πρέπει το σύνολο $\Gamma = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$ να μην είναι το κενό σύνολο. Αν το $\Gamma \neq \emptyset$ τότε ορίζεται η $\frac{f}{g}$ και το σύνολο Γ θα είναι το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$.

Ο τύπος της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Παράδειγμα 19.

Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = \eta\mu x$.

Λύση

Η f ορίζεται αν και μόνο αν $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$D_f = [-1, 1].$$

Το πεδίο ορισμού της g είναι:

$$D_g = \mathbb{R}.$$

1. Για να ορίζεται η $f \circ g$, θα πρέπει το σύνολο $A_1 = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \neq \emptyset$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ g(x) \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Άρα $A_1 = \mathbb{R}$. Επομένως ορίζεται η $f \circ g$. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το σύνολο $A_1 = \mathbb{R}$.

Έτσι η $f \circ g$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\eta\mu x) = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = |\sigma\upsilon\nu x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Για να ορίζεται η $g \circ f$, θα πρέπει $A_2 = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \neq \emptyset$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \in [-1, 1] \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

Άρα $A_2 = [-1, 1] \neq \emptyset$. Επομένως ορίζεται η $g \circ f$. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι το σύνολο $A_2 = [-1, 1]$.

Έτσι η $g \circ f$ είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x^2}) = \eta\mu(\sqrt{1-x^2}), \quad x \in [-1, 1]$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνονται δυο συναρτήσεις f , g και ζητείται η συνάρτηση $f \circ g$ τότε ενεργούμε ως εξής:

i. Εξετάζουμε αν ορίζεται η $f \circ g$.

Η $f \circ g$ ορίζεται αν το σύνολο $A_1 = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \neq \emptyset$.

ii. Προσδιορίζουμε τον τύπο της $f \circ g$. Ο τύπος της $f \circ g$ προσδιορίζεται από την σχέση:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x) = 2 + x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$(g \circ f)(x) = 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Πεδίο ορισμού της $f(x) = 2 + x$ είναι το $\mathbb{R}$ και της $g(f(x)) = 1 - x^2$ ομοίως το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 2 + x$ και $g(f(x)) = 1 - x^2$.

$$\text{Άρα } g(2 + x) = 1 - x^2 \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \quad \quad \quad \mathbf{(1)}$$

Τώρα θα βρούμε τη $g(x)$.

$$\text{Θέτουμε } y = 2 + x \Leftrightarrow x = y - 2, \quad \text{με } y \in \mathbb{R}.$$

Η σχέση **(1)** γράφεται πλέον $g(y) = 1 - (y - 2)^2$ με $y \in \mathbb{R}$ ή

$$g(y) = 1 - y^2 + 4y - 4 = -y^2 + 4y - 3 \quad \text{με } y \in \mathbb{R} \quad \text{ή}$$

$$\text{ισοδύναμα } g(x) = -x^2 + 4x - 3 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 2.

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει:

$$(g \circ f)(x) = 3x + 2, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x+2}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

Λύση

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $g(f(x)) = 3x + 2$ **(1)** και $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$

$$\text{Άρα } g(f(x)) = \frac{f(x)+2}{f(x)-2}, \quad f(x) \neq 2 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** έχουμε: $\frac{f(x)+2}{f(x)-2} = 3x + 2$ με $f(x) \neq 2$ και

$$f(x) + 2 = (3x + 2)[f(x) - 2] \Leftrightarrow$$

$$f(x) + 2 = 3xf(x) + 2f(x) - 6x - 4 \Leftrightarrow 3xf(x) + f(x) = 6x + 6 \Leftrightarrow$$

$$(3x+1)f(x) = 6(x+1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{6(x+1)}{3x+1} \quad \text{με } x \neq -\frac{1}{3}$$

Πρέπει όμως $f(x) \neq 2$ δηλαδή $\frac{6(x+1)}{3x+1} \neq 2 \Leftrightarrow 6x+6 \neq 6x+2$ η οποία ισχύει πάντα.

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{6(x+1)}{3x+1} \quad \text{με } x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 23/2/2012