

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

[Κεφ. 1.3: Μονότονες Συναρτήσεις - Αντίστροφη Συνάρτηση σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Β****Άσκηση 1.**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 4)$ και $(4, +\infty)$ αλλά όχι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A = [0, 4) \cup (4, +\infty)$.

Λύση

Η συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη στο $\mathbb{R}$ όταν ισχύει $(x \geq 0 \text{ και } 2 - \sqrt{x} \neq 0) \Leftrightarrow (x \geq 0 \text{ και } x \neq 4)$ δηλαδή όταν $x \in A = [0, 4) \cup (4, +\infty)$.

Για την μονοτονία της f σχηματίζουμε τον λόγο μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ για τυχαία $x_1, x_2 \in A$.

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\frac{\sqrt{x_2}}{2-\sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{x_1}}{2-\sqrt{x_1}}}{x_2 - x_1} = \frac{2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})}{(x_2 - x_1)(2 - \sqrt{x_2})(2 - \sqrt{x_1})} = \frac{2(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(2 - \sqrt{x_2})(2 - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} = \\ &= \frac{2}{(2 - \sqrt{x_2})(2 - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}.\end{aligned}$$

Το πρόσημο του λ εξαρτάται από το πρόσημο των $2 - \sqrt{x_2}$ και $2 - \sqrt{x_1}$. Έτσι:

- Αν $x_1, x_2 \in [0, 4)$ είναι $(0 \leq x_1 < 4 \text{ και } 0 \leq x_2 < 4) \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} < 2 \text{ και } \sqrt{x_2} < 2)$ οπότε

$$(2 - \sqrt{x_2})(2 - \sqrt{x_1}) > 0.$$

Δηλαδή $\lambda > 0$.

- Αν $x_1, x_2 \in (4, +\infty)$ είναι $(x_1 > 4 \text{ και } x_2 > 4) \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} > 2 \text{ και } \sqrt{x_2} > 2)$ οπότε

$$(2 - \sqrt{x_2})(2 - \sqrt{x_1}) > 0.$$

Δηλαδή $\lambda > 0$.

- Αν $x_1 \in [0, 4)$ και $x_2 \in (4, +\infty)$ τότε

$$x_1 < 4 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < 2 < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{x_2})(2 - \sqrt{x_1}) < 0.$$

Δηλαδή $\lambda < 0$.

Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0, 4)$ και $(4, +\infty)$ είναι $\lambda > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτά όχι όμως και στην ένωσή τους.

Άσκηση 2.

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}$

ii. $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{3+x^2}}$

Λύση

i. Η f είναι καλά ορισμένη στο $\mathbb{R}$ όταν $9-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-3,3) = \Delta$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-3,0]$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 < -x_2^2 \Leftrightarrow 9-x_1^2 < 9-x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9-x_1^2} < \sqrt{9-x_2^2} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{9-x_1^2}} > \frac{5}{\sqrt{9-x_2^2}} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-3,0]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,3)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$0 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Leftrightarrow 9-x_1^2 > 9-x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9-x_1^2} > \sqrt{9-x_2^2} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{9-x_1^2}} < \frac{5}{\sqrt{9-x_2^2}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3)$.

ii. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Αν $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ είναι:

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1}{\sqrt{3+x_1^2}} < \frac{2x_2}{\sqrt{3+x_2^2}} \Leftrightarrow \frac{4x_1^2}{3+x_1^2} < \frac{4x_2^2}{3+x_2^2} \Leftrightarrow 12x_1^2 + 4x_1^2x_2^2 < 12x_2^2 + 4x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 < x_2^2 \stackrel{x_1>0}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2 \stackrel{x_2>0}{\Leftrightarrow}$$

Αν $x_1, x_2 \in (-\infty,0]$ είναι:

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1}{\sqrt{3+x_1^2}} < \frac{2x_2}{\sqrt{3+x_2^2}} \Leftrightarrow \frac{4x_1^2}{3+x_1^2} > \frac{4x_2^2}{3+x_2^2} \Leftrightarrow 12x_1^2 + 4x_1^2x_2^2 > 12x_2^2 + 4x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 > x_2^2 \stackrel{x_1 < 0}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2$$

$$\text{Επιπλέον αν } x_1 < 0 < x_2 \text{ είναι } \frac{2x_1}{\sqrt{3+x_1^2}} < 0 < \frac{2x_2}{\sqrt{3+x_2^2}} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση και για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Άσκηση 3.

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \frac{11^x}{\sqrt{11-x}}$

ii. $g(x) = \ln(x - \pi) - e^{\pi-x}$

Λύση

i. Η f ορίζεται στο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : 11-x > 0\}$ δηλαδή στο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : x < 11\}$ δηλαδή στο $\Delta = (-\infty, 11)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 11-x_1 > 11-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{11-x_1} > \sqrt{11-x_2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{11-x_1}} < \frac{1}{\sqrt{11-x_2}}} \quad (1)$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \boxed{11^{x_1} < 11^{x_2}} \quad (2).$$

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) (αφού όλες οι παραστάσεις είναι θετικές) έχουμε

$$\frac{11^{x_1}}{\sqrt{11-x_1}} < \frac{11^{x_2}}{\sqrt{11-x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ οπότε η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \Delta.$$

ii. Η g ορίζεται στο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : x - \pi > 0\}$ δηλαδή στο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : x > \pi\}$ δηλαδή στο $\Delta = (\pi, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - \pi < x_2 - \pi \xrightarrow{\ln x \uparrow} \boxed{\ln(x_1 - \pi) < \ln(x_2 - \pi)} \quad (3)$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow \pi - x_1 > \pi - x_2 \xrightarrow{e^x \uparrow} e^{\pi-x_1} > e^{\pi-x_2} \Leftrightarrow \boxed{-e^{\pi-x_1} < -e^{\pi-x_2}} \quad (4).$$

Με πρόσθεση των (3), (4) έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Άσκηση 4.

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$

ii. $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Λύση

i. Η f ορίζεται στο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ και } x \neq 0\}$ δηλαδή στο $\Delta = (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ είναι:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{1}{x_2} - \sqrt{x_2}\right) - \left(\frac{1}{x_1} - \sqrt{x_1}\right)}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} - \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} = \\ &= -\frac{1}{x_1 x_2} - \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{(x_2 - x_1)(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} = -\frac{1}{x_1 x_2} - \frac{(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} = \\ &= -\frac{1}{x_1 x_2} - \frac{1}{(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} < 0 \text{ αφού } x_1, x_2 \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Η g ορίζεται στο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ δηλαδή στο $\Delta = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ είναι:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{2x_2+3}{x_2-1} - \frac{2x_1+3}{x_1-1}}{x_2 - x_1} = \frac{2x_2 x_1 - 2x_2 + 3x_1 - 3 - 2x_2 x_1 - 3x_2 + 2x_1 + 3}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)(x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{-2x_2 + 3x_1 - 3x_2 + 2x_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - 1)(x_1 - 1)} = \frac{-5(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - 1)(x_1 - 1)} = \frac{-5}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}\end{aligned}$$

- Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ είναι $x_1 - 1 < 0$ και $x_2 - 1 < 0$ οπότε $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$ δηλαδή $\lambda < 0$.
- Αν $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ είναι $x_1 - 1 > 0$ και $x_2 - 1 > 0$ οπότε $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$ δηλαδή $\lambda < 0$.

- Αν $x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$ είναι $x_1 - 1 < 0$ και $x_2 - 1 > 0$ οπότε $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$ δηλαδή $\lambda > 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωσή τους δηλαδή στο πεδίο ορισμού της Δ .

Άσκηση 5.

A) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

B) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{e^x} + e^{\frac{1}{x}} - \ln x$.

Λύση

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} \boxed{f\left(\frac{1}{x_1}\right) > f\left(\frac{1}{x_2}\right)} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1), (2) είναι: $g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

B) Η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα και θετική στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο $(0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

- Με εφαρμογή του A για $f(x) = e^x$, $x_1 < x_2 \stackrel{g \downarrow}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{e^{x_1}} + e^{\frac{1}{x_1}} > \frac{1}{e^{x_2}} + e^{\frac{1}{x_2}}}$ (3)

- Επίσης $x_1 < x_2 \stackrel{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow \boxed{-\ln x_1 > -\ln x_2}$ (4)

Με πρόσθεση των (3), (4) προκύπτει ότι $h(x_1) > h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 6.

A) Η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, είναι άρτια και γνησίως μονότονη στο $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, με $f(0) = \alpha$, $f(\alpha) = 0$.

i. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\alpha, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha]$.

ii. Αποδείξτε ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\alpha, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \alpha]$.

B) Μελετήστε την μονοτονία της συνάρτησης $h(x) = 1 - (1 - x^2)^2$ στο $[-1, 1]$.

Λύση

A) i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0, \alpha]$ θα ισχύει μόνο μία από τις ισοδυναμίες $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (1), $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (2) για κάθε $x_1, x_2 \in [0, \alpha]$.

Όμως $0 < \alpha$ και $f(0) = \alpha > 0 = f(\alpha)$ δηλαδή $f(0) > f(\alpha)$ από όπου και συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (2) οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha]$.

Επίσης για κάθε $x_1, x_2 \in [-\alpha, 0]$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$-\alpha \leq x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq -x_1 > -x_2 \geq 0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha]$ θα έχουμε $f(-x_1) < f(-x_2) \stackrel{f \text{ άρτια}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\alpha, 0]$.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in [-\alpha, 0]$ με $x_1 < x_2$. Τότε διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} -\alpha \leq x_1 < x_2 \leq 0 &\stackrel{f \uparrow \text{ στο } [-\alpha, 0]}{\Leftrightarrow} f(-\alpha) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq f(0) \stackrel{f \text{ άρτια}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq f(0) \Leftrightarrow \\ 0 \leq f(x_1) < f(x_2) \leq \alpha. \end{aligned}$$

Δηλαδή $f(x_1), f(x_2) \in [0, \alpha]$ με $f(x_1) < f(x_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha]$ θα είναι $f(f(x_1)) > f(f(x_2))$ από το οποίο προκύπτει ότι η σύνθεση $f \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\alpha, 0]$.

Ομοίως προκύπτει και ότι $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \alpha]$.

Πράγματι αν $x_1, x_2 \in [0, \alpha]$ με $x_1 < x_2$. Τότε διαδοχικά έχουμε:

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq \alpha \quad \overset{f \downarrow \text{ στο } [0, \alpha]}{\Leftrightarrow} \quad f(0) \geq f(x_1) > f(x_2) \geq f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \geq f(x_1) > f(x_2) \geq 0.$$

Δηλαδή $f(x_1), f(x_2) \in [0, \alpha]$ με $f(x_1) > f(x_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha]$ θα είναι $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$ από το οποίο προκύπτει ότι η σύνθεση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \alpha]$.

Β) Εφαρμογή του ερωτήματος Α όπου $f(x) = 1 - x^2$.

Πράγματι για την $f(x) = 1 - x^2$ έχουμε:

- $f(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = f(x)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$.
- Επίσης είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = -1 < 0$ και επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ δηλαδή στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ δηλαδή στο $[0, +\infty)$ από όπου και συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.
- Τέλος ισχύει $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$.

Επομένως σύμφωνα με το Α η συνάρτηση $f \circ f$, δηλαδή η $h(x) = 1 - (1 - x^2)^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

Άσκηση 7.

Αν $f(x) = e^x + x^3 + x$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο $\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ. Αν g είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ να λύσετε την ανίσωση $g(x^3 + e^x) < g(1-x)$.

Λύση

Α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad (2)$$

$$\text{Επίσης } x_1 < x_2 \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1), (2), (3) είναι: $e^{x_1} + x_1^3 + x_1 < e^{x_2} + x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ απ' όπου προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Για $x = 0$ είναι $f(0) = e^0 + 0^3 + 0 = 1$, δηλαδή η $x = 0$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ρίζες θ, ξ με $\theta < \xi$ της εξίσωσης $f(x) = 1$ δηλαδή $f(\theta) = f(\xi) = 1$, θα είναι λόγω μονοτονίας $f(\theta) < f(\xi) \Leftrightarrow 1 < 1$ Άτοπο.

Επομένως η ρίζα $x = 0$ της εξίσωσης $f(x) = 1$ είναι μοναδική.

Γ) Επειδή η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $(x^3 + e^x), (1-x) \in \mathbb{R}$ διαδοχικά έχουμε:

$$g(x^3 + e^x) < g(1-x) \Leftrightarrow x^3 + e^x > 1-x \Leftrightarrow x^3 + e^x + x > 1 \Leftrightarrow f(x) > \overset{f \uparrow}{f(0)} \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άσκηση 8.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

B) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(x^2 + x + 1) + x^2 < \ln(x + 2) + 1$.

Λύση

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{\ln x \uparrow} \ln x_1 < \ln x_2 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } x_1 < x_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1), (2) είναι: $\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

απ' όπου προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

B) Για κάθε $x > -2$ είναι:

$$\ln(x^2 + x + 1) + x^2 < \ln(x + 2) + 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 < \ln(x + 2) + 1 + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 < \ln(x + 2) + x + 2 \Leftrightarrow f(x^2 + x + 1) < f(x + 2) \xrightarrow{f \uparrow} x^2 + x + 1 < x + 2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ δεκτές λύσεις αφού } x > -2.$$

Άσκηση 9.

A) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x$ στο $[0, \pi]$.

B) Να αποδείξετε $\frac{\pi}{2e} > \frac{\sin e}{\sin e - 1}$.

Λύση

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2} \quad (1).$$

$$x_1 < x_2 \stackrel{\sin x \downarrow \text{ στο } [0, \pi]}{\Leftrightarrow} \boxed{\sin x_1 > \sin x_2} \quad (2).$$

- Αν $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) > 0$, $\sin x_1 > 0$, $\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) \geq 0$, $\sin x_2 \geq 0$

οπότε οι (1), (2) με πολλαπλασιασμό δίνουν $f(x_1) > f(x_2)$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) \leq 0$, $\sin x_1 \leq 0$, $\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) < 0$, $\sin x_2 < 0$

οπότε οι (1), (2) με πολλαπλασιασμό δίνουν $f(x_1) < f(x_2)$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

B) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και $\frac{\pi}{2} < e < \pi$. Επομένως:

$$f(e) < f(\pi) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - e\right) \sin e < \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \sin \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \sin e - e \sin e < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \sin e - \frac{\pi}{2} < e \sin e \Leftrightarrow$$

$$\pi \sin e - \pi < 2e \sin e \Leftrightarrow \pi(\sin e - 1) < 2e \sin e \Leftrightarrow \frac{\pi}{2e} > \frac{\sin e}{\sin e - 1} \quad (\text{αφού } \sin e - 1 < 0).$$

Άσκηση 10.

A) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = e^x \varepsilon\phi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

B) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}} < \sqrt{3}$.

Λύση

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < e^{x_1} < e^{x_2} \quad (1) \text{ διότι } e^x \text{ γνησίως αύξουσα.}$$

$$0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \varepsilon\phi x_1 < \varepsilon\phi x_2 \quad (2) \text{ διότι } \varepsilon\phi x \text{ γνησίως αύξουσα στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Από (1) και (2) με πολλαπλασιασμό είναι $f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

B) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ θα είναι

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) < f\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} < e^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}} < e^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{3}}} < \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}} < \sqrt{3}.$$

2^{ος} Τρόπος:

Έχουμε $e^{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}} < \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{\frac{-\pi}{12}} < \sqrt{3}$ που ισχύει, αφού $e^{\frac{-\pi}{12}} < e^0 = 1 < \sqrt{3}$

Άσκηση 11.

A) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln(1+x^2)$.

B) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.

Λύση άσκησης 13

A) Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ αφού $1+x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow 1+x_1^2 > 1+x_2^2 \xrightarrow{\ln \text{ γν. αύξουσα}} \Leftrightarrow \ln(1+x_1^2) > \ln(1+x_2^2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \quad (2)$$

Οι (1), (2) με πρόσθεση δίνουν $f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 1+x_1^2 < 1+x_2^2 \xrightarrow{\ln \text{ γν. αύξουσα}} \Leftrightarrow \ln(1+x_1^2) < \ln(1+x_2^2) \quad (3)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \quad (4)$$

Οι (3), (4) με πρόσθεση δίνουν $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

B) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι για $x = 0$ ισχύει $f(0) = 0^2 + \ln(1+0^2) = 0$, οπότε η $x = 0$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερη λύση $\rho > 0$ τότε ως λύση θα ικανοποιεί την εξίσωση δηλαδή θα ισχύει $f(\rho) = 0$ (5).

Όμως λόγω μονοτονίας της f στο $[0, +\infty)$ θα ισχύει $\rho > 0 \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} \Leftrightarrow f(\rho) > f(0) \xrightarrow{(5)} 0 > 0$ το οποίο είναι Άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει δεύτερη λύση $\rho < 0$.

Επομένως η λύση $x = 0$ είναι μοναδική για την εξίσωση $f(x) = 0$ δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο (την αρχή των αξόνων).

Άσκηση 12.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,3)$ και ισχύει $|2f(x)-5| \leq 1$ αποδείξτε ότι έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση

Είναι:

$$|2f(x)-5| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq 2f(x)-5 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$4 \leq 2f(x) \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$2 \leq f(x) \leq 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Επιπλέον επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα $A(0,2)$ και $B(1,3)$ θα είναι $f(0)=2$ και $f(1)=3$.

Οπότε η (1) γίνεται: $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η f έχει μέγιστη τιμή το $f(1)=3$ και ελάχιστη τιμή το $f(0)=2$.

Άσκηση 13.

A. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και θετική στο Δ αποδείξτε ότι η $g(x) = e^{\sqrt{f(x)}}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ ενώ η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

B. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις $g(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$ και $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

A. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι :

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{f(x_1)} > \sqrt{f(x_2)} \stackrel{e^x \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} e^{\sqrt{f(x_1)}} > e^{\sqrt{f(x_2)}} \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \text{ άρα η } g$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

Ομοίως:

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{f(x_1)} > \sqrt{f(x_2)} \stackrel{\frac{1}{x} \text{ γν. φθ.}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{f(x_1)}} < \frac{1}{\sqrt{f(x_2)}} \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2) \text{ άρα } h$$

γνησίως αύξουσα στο Δ

B. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα και θετική στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ επομένως σύμφωνα με το A ερώτημα η συνάρτηση $g(x) = e^{\sqrt{\sin x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα ενώ η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση 14.

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη, γνησίως αύξουσα στο Δ και ισχύει $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \Delta$.

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την $h(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{1+\eta\mu^4 x}$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

A. 1^{ος} Τρόπος (Σύνθεση γνησίως αύξουσας με γνησίως αύξουσα)

Η g είναι σύνθεση της $f(x)$ με την $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, όπως και η h αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ είναι:

$$\lambda = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{x_2}{1+x_2^2} - \frac{x_1}{1+x_1^2}}{x_2 - x_1} = \frac{x_2(1+x_1^2) - x_1(1+x_2^2)}{(x_2 - x_1)(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{x_2 + x_2x_1^2 - x_1 - x_1x_2^2}{(x_2 - x_1)(1+x_2^2)(1+x_1^2)} =$$

$$\frac{x_2 - x_1 - x_2x_1(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_2x_1)}{(x_2 - x_1)(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{(1 - x_2x_1)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0 \text{ διότι}$$

$$(1+x_2^2)(1+x_1^2) > 0$$

και $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ άρα $(1 - x_1x_2) > 0$.

Έτσι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση δύο συναρτήσεων με το ίδιο είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$.

2^{ος} Τρόπος (με λόγο μεταβολής κατευθείαν)

Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ είναι :

$$\lambda = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{f(x_2)}{1+f^2(x_2)} - \frac{f(x_1)}{1+f^2(x_1)}}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)(1+f^2(x_1)) - f(x_1)(1+f^2(x_2))}{(x_2 - x_1)(1+f^2(x_2))(1+f^2(x_1))} =$$

$$\frac{f(x_2) + f^2(x_1)f(x_2) - f(x_1) - f^2(x_2)f(x_1)}{(x_2 - x_1)(1+f^2(x_2))(1+f^2(x_1))} = \frac{[f(x_2) - f(x_1)][1 - f(x_2)f(x_1)]}{(x_2 - x_1)(1+f^2(x_2))(1+f^2(x_1))} =$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} \frac{1 - f(x_2)f(x_1)}{(1 + f^2(x_2))(1 + f^2(x_1))}.$$

Επειδή f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Επίσης $0 < f(x_1) < 1$ και

$0 < f(x_2) < 1$ οπότε $1 - f(x_2)f(x_1) > 0$ και $(1 + f^2(x_2))(1 + f^2(x_1)) > 0$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\lambda > 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2 x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \Delta$ είναι γνησίως αύξουσα αφού για κάθε

$x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ισοδύναμα $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x_1 < \eta\mu^2 x_2$. Επίσης ισχύει

$0 < \eta\mu^2 x < 1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Συνεπώς η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **A** ερωτήματος και επιπλέον είναι

$h(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \eta\mu^4 x} = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)}$ οπότε θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση 15.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3^{1-x} + 5 = 8 \cdot 2^x$

ii) $5^x + 12^x = 13^x$

Λύση

i) Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $5 = 8 \cdot 2^x - 3^{1-x}$ από την οποία προκύπτει η συνάρτηση $f(x) = 8 \cdot 2^x - 3^{1-x}$. Οπότε αναζητούμε λύση στην εξίσωση $f(x) = 5$.

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$ αφού $f(0) = 8 \cdot 2^0 - 3^{1-0} = 5$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{x_1} < 8 \cdot 2^{x_2} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Leftrightarrow 3^{1-x_1} > 3^{1-x_2} \Leftrightarrow -3^{1-x_1} < -3^{1-x_2} \quad (2)$$

και με πρόσθεση των (1), (2) έχουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Έτσι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερη λύση $\rho > 0$ τότε ως λύση θα ικανοποιεί την εξίσωση δηλαδή θα ισχύει $f(\rho) = 5$ (3) και λόγω μονοτονίας της f στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει

$\rho > 0 \xrightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} \xrightarrow{(3)} f(\rho) > f(0) \Leftrightarrow 5 > 5$ το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει δεύτερη λύση $\rho < 0$.

Επομένως η λύση $x = 0$ είναι μοναδική για την εξίσωση $f(x) = 5$ δηλαδή για την $3^{1-x} + 5 = 8 \cdot 2^x$.

ii) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$ η οποία έχει ως ρίζα την $x = 2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ με $x \in \mathbb{R}$ για την οποία είναι $f(2) = 1$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^{x_1} > \left(\frac{5}{13}\right)^{x_2} \quad (1)$ και

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^{x_1} > \left(\frac{12}{13}\right)^{x_2} \quad (2)$ οπότε με πρόσθεση έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερη λύση $\rho > 2$ τότε ως λύση θα ικανοποιεί την εξίσωση δηλαδή θα ισχύει $f(\rho) = 1$ (3) και λόγω μονοτονίας της f στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει

$\rho > 2 \xrightarrow{f \text{ γν. φθίν.}} \xrightarrow{(3)} f(\rho) < f(2) \Leftrightarrow 1 < 1$ το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει δεύτερη λύση $\rho < 2$.

Επομένως η λύση $x = 2$ είναι μοναδική για την εξίσωση $f(x) = 1$ δηλαδή για την

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1.$$

Άσκηση 16.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + (\alpha - 1)\sqrt{x} - 2\frac{\alpha - 1}{x} - 1$ με $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

A. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f στο πεδίο ορισμού της για τις διάφορες τιμές του α .

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Λύση

A. Η f είναι άθροισμα συναρτήσεων με το ίδιο είδος μονοτονίας στο $(0, +\infty)$ το οποίο είναι και το κοινό πεδίο ορισμού τους, για όλες τις δυνατές τιμές του α .

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$

Διακρίνω δύο περιπτώσεις για το α .

1^η Περίπτωση: $0 < \alpha < 1$

Η συνάρτηση α^x είναι $0 < \alpha < 1$ οπότε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}}$ (1)

Επίσης: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \xrightarrow{\alpha-1 < 0} \boxed{(\alpha-1)\sqrt{x_1} > (\alpha-1)\sqrt{x_2}}$ (2)

Ακόμη: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{-2}{x_1} > \frac{-2}{x_2} \xrightarrow{\alpha-1 < 0} \boxed{-2\frac{(\alpha-1)}{x_1} > -2\frac{(\alpha-1)}{x_2}}$ (3)

Με πρόσθεση των (1), (2), (3) έχουμε ότι

$$\alpha^{x_1} + (\alpha - 1)\sqrt{x_1} - 2\frac{\alpha - 1}{x_1} - 1 > \alpha^{x_2} + (\alpha - 1)\sqrt{x_2} - 2\frac{\alpha - 1}{x_2} - 1 \Leftrightarrow$$

$f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

2^η Περίπτωση: $\alpha > 1$

Η συνάρτηση α^x είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ αφού $\alpha > 1$ οπότε

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}}$ (4)

Επίσης: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \xrightarrow{\alpha-1 > 0} \boxed{(\alpha-1)\sqrt{x_1} < (\alpha-1)\sqrt{x_2}}$ (5)

Ακόμη: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{-2}{x_1} > \frac{-2}{x_2} \xrightarrow{\alpha-1 > 0} \boxed{-2\frac{(\alpha-1)}{x_1} < -2\frac{(\alpha-1)}{x_2}}$ (6)

Με πρόσθεση των (4), (5), (6) έχουμε ότι

$$\alpha^{x_1} + (\alpha - 1)\sqrt{x_1} - 2\frac{\alpha - 1}{x_1} - 1 < \alpha^{x_2} + (\alpha - 1)\sqrt{x_2} - 2\frac{\alpha - 1}{x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Τελικά έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ για $\alpha > 1$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ για $0 < \alpha < 1$. Σε κάθε περίπτωση όμως η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0, +\infty)$.

B. Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $\rho = 1$ καθώς για $x = 1$ έχουμε

$$f(1) = \alpha + (\alpha - 1)\sqrt{1} - 2\frac{(\alpha - 1)}{1} - 1 = \alpha + \alpha - 1 - 2\alpha + 2 - 1 = 0$$

και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0, +\infty)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Άσκηση 17.

A. Για κάθε $\alpha > 0$ αποδείξτε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \pi^x + \frac{1}{\pi^x}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathbb{R}$.

Λύση

A. Είναι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$.

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς για κάθε $\alpha > 0$ επομένως και η αρχική ισοδύναμή της ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

B. Είναι $\pi^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως σύμφωνα με το **A** ερώτημα θα ισχύει

$$\pi^x + \frac{1}{\pi^x} \geq 2.$$

Δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 2$ και επιπλέον $f(0) = \pi^0 + \frac{1}{\pi^0} = 2$ οπότε έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0)$. Άρα η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 2$.

Άσκηση 18.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 3x + \eta\mu^2 5x$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση

Είναι :

$$0 \leq \eta\mu^2 x \leq 1 \text{ (1).}$$

$$0 \leq \eta\mu^2 3x \leq 1 \text{ (2).}$$

$$0 \leq \eta\mu^2 5x \leq 1 \text{ (3).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) έχουμε

$$0 \leq f(x) \leq 3 \text{ (4)}$$

Επιπλέον είναι $f(0) = \eta\mu^2 0 + \eta\mu^2 0 + \eta\mu^2 0 = 0$ και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \eta\mu^2 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + \eta\mu^2 5\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Οπότε η (4) γίνεται: $f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η f έχει μέγιστη τιμή το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ και ελάχιστη τιμή το $f(0) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

- A) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^3(x) + 3f(x^3) + 2$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{3x} + 3e^{x^3} + 2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) < f^3(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1^3) < f(x_2^3) \Leftrightarrow 3f(x_1^3) < 3f(x_2^3) \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1), (2) έχουμε $f^3(x_1) + 3f(x_1^3) < f^3(x_2) + 3f(x_2^3) \Leftrightarrow$

$$f^3(x_1) + 3f(x_1^3) + 2 < f^3(x_2) + 3f(x_2^3) + 2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Εφαρμογή του A για $f(x) = e^x$ αφού είναι γνησίως αύξουσα και επιπλέον είναι

$$f^3(x) + 3f(x^3) + 2 = (e^x)^3 + 3e^{x^3} + 2 = e^{3x} + 3e^{x^3} + 2 = h(x).$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2.

A) Αποδείξτε ότι αν f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ και g γνησίως φθίνουσα στο $f(\Delta)$ τότε η σύνθεση της f με την g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

B) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $g(x) = -x^3 - x + 1$ στο $[-1, 1]$.

Γ) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την $h(x) = -\sin^3 x - \sin x + 1$ στο $[0, \pi]$.

Λύση

A) Έστω $x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 \in \Delta$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ θα ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Όμως οι $f(x_1), f(x_2) \in f(\Delta)$ στο οποίο η g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ δηλαδή $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$, συνεπώς η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$.

B) Για κάθε $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \quad (1).$$

$$\text{Επίσης } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \quad (2).$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) είναι:

$$-x_1^3 - x_1 > -x_2^3 - x_2 \Leftrightarrow -x_1^3 - x_1 + 1 > -x_2^3 - x_2 + 1 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

από όπου προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Γ) Η συνάρτηση h είναι σύνθεση της f με την g , όπου $f(x) = \sin x$ που είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και $g(x) = -x^3 - x + 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$. Τέλος επειδή ισχύει $-1 \leq \sin x \leq 1$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ έχουμε ότι $g([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Εφαρμόζοντας το (A) ερώτημα στις συναρτήσεις $f(x) = \sin x$ και $g(x) = -x^3 - x + 1$ προκύπτει ότι η σύνθεση $g \circ f$ δηλαδή η $h(x) = -\sin^3 x - \sin x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$.

Άσκηση 3.

- i. Αν η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα Δ να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .
- ii. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}e^x - e^x - \sqrt{x} + 1$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο $[0, +\infty)$.

Λύση

i. Έστω $\rho_1 < \rho_2$ δύο τουλάχιστον ρίζες της f στο διάστημα Δ .

Τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ (1).

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε: $\rho_1 < \rho_2 \Leftrightarrow f(\rho_1) < f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 < 0$ Άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε: $\rho_1 < \rho_2 \Leftrightarrow f(\rho_1) > f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 > 0$ Άτοπο.

Επομένως αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ καταλήγουμε σε άτοπο άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

ii. Η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = e^x(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1)(e^x - 1)$.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\sqrt{x} - 1 = 0 \text{ ή } e^x - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x} = 1 \text{ ή } e^x = 1) \Leftrightarrow$$

$$(x = 1 \text{ ή } x = 0)$$

Δηλαδή η f έχει δύο ρίζες στο $[0, +\infty)$ οπότε σύμφωνα με το υποερώτημα (i) η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 4.

Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική στο $\mathbb{R}$ με περίοδο $T > 0$ τότε να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Με άτοπο:

Για τυχαίο $\alpha \in \mathbb{R}$ και επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο T θα είναι $\boxed{f(\alpha) = f(\alpha + T)}$ (1)

Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

- f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Στην περίπτωση αυτή πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

και για $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha + T$ θα είναι $\alpha < \alpha + T \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) < f(\alpha + T)}$ (2).

Οι (1), (2) οδηγούν σε άτοπο.

- f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Στην περίπτωση αυτή πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ και για

$x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha + T$ θα είναι $\alpha < \alpha + T \Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) > f(\alpha + T)}$ (3).

Οι (1), (3) οδηγούν σε άτοπο.

Άρα σε κάθε περίπτωση η υπόθεση ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ οδηγεί σε άτοπο, άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 1/12/2013