

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

[Κεφ. 1.3: Μονότονες Συναρτήσεις - Αντίστροφη Συνάρτηση σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = -2x + 3$

β) $g(x) = x^2 - 4x + 5$

γ) $h(x) = \eta\mu x - \ln(x+2)$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha = -2 < 0$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα.

Μεθοδολογία

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η συνάρτηση g είναι της μορφής $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = 1 > 0$ και $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$, επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Μεθοδολογία

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

Επειδή η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$ (1) και

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \stackrel{\ln x \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} \ln(x_1 + 2) < \ln(x_2 + 2) \Leftrightarrow -\ln(x_1 + 2) > -\ln(x_2 + 2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\eta\mu x_1 - \ln(x_1 + 2) > \eta\mu x_2 - \ln(x_2 + 2) \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

Συνεπώς η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα.

Μεθοδολογία

Αν f, g γνησίως φθίνουσες (ή γνησίως αύξουσες) στο Δ τότε με την χρήση των ανισοτικών σχέσεων που προκύπτουν αποδεικνύεται ότι $f + g$ είναι γνησίως φθίνουσα (ή γνησίως αύξουσα αντίστοιχα) στο Δ .

Παράδειγμα 2.

Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

β) $g(x) = -\frac{2}{x} + 1$, με πεδίο ορισμού το $A[2, 6)$.

γ) $h(x) = |7 - x| - 10$

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = -3 < 0$ άρα η f

παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2 \cdot (-3)} = \frac{1}{3}$, το $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{2^2 - 4(-3) \cdot 1}{4 \cdot (-3)} = -\frac{16}{-12} = \frac{4}{3}$.

Μεθοδολογία

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha < 0$ (ή $\alpha > 0$) παρουσιάζει μέγιστο (ή ελάχιστο αντίστοιχα) στο $-\frac{\beta}{2\alpha}$ το $-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

β) Έχουμε $2 \leq x < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} \leq -2 \cdot \frac{1}{x} < -2 \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{2}{x} < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$-1 + 1 \leq -\frac{2}{x} + 1 < -\frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{2}{x} + 1 < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 \leq g(x) < \frac{2}{3}$$

Επομένως η g έχει ελάχιστο για $x = 2$ το $g(2) = 0$ και δεν έχει μέγιστο.

Μεθοδολογία

Αν από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης προκύπτει ισοδύναμα ανισότητα του x , με εφαρμογή των ιδιοτήτων στις ανισότητες βρίσκουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Τότε εάν αυτό είναι διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta)$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το α και δεν παρουσιάζει μέγιστο.

γ) Η συνάρτηση έχει $D_h = \mathbb{R}$ και $|7 - x| \geq 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|7 - x| = 0$ για $x = 7$.

$$(1) \Leftrightarrow |7 - x| - 10 \geq -10 \Leftrightarrow h(x) \geq -10.$$

Άρα η h παρουσιάζει για $x = 7$ ελάχιστο το -10 .

Μεθοδολογία

Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι της μορφής $f(x) = |g(x)| + c$ ή της μορφής

$f(x) = (g(x))^v + c$, όπου v μη μηδενικός άρτιος και υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ τότε επειδή $|g(x)| \geq 0$ ή $(g(x))^v \geq 0$, προκύπτει $f(x) \geq c$ δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το c .

Παράδειγμα 3.

$$\text{Αν } f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x^3}}$$

α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x^3}}$ και

β) Να προσδιορίσετε τα ακρότατά της.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ όταν

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 - 2x^3 \geq 0 \\ \text{και} \\ 4 - \sqrt{16 - 2x^3} \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 \leq 8 \\ \text{και} \\ \sqrt{16 - 2x^3} \leq 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 2 \\ \text{και} \\ 16 - 2x^3 \leq 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 2 \\ \text{και} \\ x^3 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [0, 2] = A$$

α) Για οποιαδήποτε x_1, x_2 στο $[0, 2]$ με $x_1 < x_2$ ισοδύναμα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3 \Leftrightarrow 16 - 2x_1^3 > 16 - 2x_2^3 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{x \leq 2}{\Leftrightarrow} \sqrt{16 - 2x_1^3} > \sqrt{16 - 2x_2^3} \Leftrightarrow 4 - \sqrt{16 - 2x_1^3} < 4 - \sqrt{16 - 2x_2^3} \stackrel{0 \leq x \leq 2}{\Leftrightarrow} \sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x_1^3}} < \sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x_2^3}}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2). \text{ Επομένως η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } A = [0, 2].$$

β) Για τα ακρότατα της f παρατηρούμε ότι λόγω της μονοτονίας της f είναι:

$$x < 2 \Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow f(x) < 2 \text{ και}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Έτσι για $x \in [0, 2]$ είναι $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$ δηλαδή η f έχει ελάχιστη τιμή το $f(0) = 0$ και μέγιστη τιμή το $f(2) = 2$.

Μεθοδολογία

Από την υπόθεση $x_1 < x_2$ για τυχαία x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της f , κατασκευαστικά καταλήγουμε σε ανίσωση της μορφής $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ οπότε συμπεραίνουμε ότι η f είναι αντιστοίχως γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Αναζητούμε ακρότατα σε μια γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ μεταξύ των τιμών $f(\alpha), f(\beta)$.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x}{2+|x|}$ $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

β) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Για $x_1 \neq x_2$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ο λόγος μεταβολής της f είναι:

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{5x_2}{2+|x_2|} - \frac{5x_1}{2+|x_1|}}{x_2 - x_1} = \frac{10x_2 + 5x_2|x_1| - 10x_1 - 5x_1|x_2|}{(x_2 - x_1)(2+|x_1|)(2+|x_2|)}$$

α) Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ τότε $|x_1| = -x_1$ και $|x_2| = -x_2$ οπότε $\lambda = \frac{10}{(2+|x_1|)(2+|x_2|)} > 0$.

Αν $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ τότε $|x_1| = x_1$ και $|x_2| = x_2$ οπότε $\lambda = \frac{10}{(2+|x_1|)(2+|x_2|)} > 0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ έπεται ότι θα είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, +\infty)$ δηλαδή στο $\mathbb{R}$.

Εναλλακτικά έχουμε:

Αν $x_1 \in (-\infty, 0]$ και $x_2 \in [0, +\infty)$ θα είναι $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = \frac{5x_1}{2+|x_1|} < 0 < \frac{5x_2}{2+|x_2|} = f(x_2)$.

Δηλαδή για κάθε συνδυασμό των $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Μερικές φορές (π.χ. όταν έχουμε απόλυτη τιμή ή συνάρτηση πολλαπλού τύπου) εξετάζουμε με τον λόγο μεταβολής ή με τον ορισμό, την μονοτονία σε υποδιαστήματα A_1 και A_2 . Για την ένωσή τους χρειάζεται επιπλέον να ελέγχουμε με τον λόγο μεταβολής ή με τον ορισμό όταν $x \in A_1$ και $x \in A_2$.

Παράδειγμα 5.

A) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες με διαφορετικό είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η σύνθεση $f \circ g$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

B) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και θετική στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

A) Υποθέτουμε ότι έχουμε τις συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με την f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και την g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$,

τότε $f(x_1) > f(x_2)$ (αφού f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ αλλάζει την φορά της ανίσωσης)

$\Leftrightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2))$ (αφού g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ διατηρεί την φορά της ανίσωσης)

$\Leftrightarrow (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$. Οπότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Όμοια αποδεικνύεται όταν f γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα.

B) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και θετική στο $\mathbb{R}$, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f}\right)(x_1) < \left(\frac{1}{f}\right)(x_2)$ οπότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι οι συναρτήσεις $\frac{1}{f}$ και f ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του A και επομένως η σύνθεση

$\frac{1}{f} \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ) Εφαρμογή του B:

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ η οποία είναι εκθετική με βάση $a = \frac{1}{2}$ και

$0 < \frac{1}{2} < 1$ έχουμε την f να είναι γνησίως φθίνουσα και θετική στο $\mathbb{R}$. Προφανώς

$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = 2^x$ οπότε $h(x) = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \left(\frac{1}{f} \circ f\right)(x)$. Άρα σύμφωνα με το B η συνάρτηση $h(x)$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Από την υπόθεση $x_1 < x_2$ για τυχαία x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού των f, g και χρησιμοποιώντας την μονοτονία τους καταλήγουμε σε ανίσωση της μορφής $(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$ ή $(f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2)$. Γενικά η σύνθεση συναρτήσεων με διαφορετικό είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$ δίνει συνάρτηση γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ ενώ η σύνθεση συναρτήσεων με ίδιο είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$ δίνει συνάρτηση γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 6.

A) Να μελετήσετε την μονοτονία της $f(x) = \ln x + \sqrt{e^x} + x^2$.

B) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \sqrt{e^x} + \ln x - 1 < \sqrt{e}$.

Λύση

A) Για να ορίζεται η f στο $\mathbb{R}$ πρέπει $x > 0$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{e^{x_1}} < \sqrt{e^{x_2}} \quad (2)$$

$$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) έχουμε

$$\ln x_1 + \sqrt{e^{x_1}} + x_1^2 < \ln x_2 + \sqrt{e^{x_2}} + x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 + \sqrt{e^x} + \ln x - 1 < \sqrt{e} \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{e^x} + \ln x < 1^2 + \sqrt{e} + \ln 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι} \\ \text{γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty) \text{ ισοδύναμα είναι } 0 < x < 1.$$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in (0, 1)$.

Μεθοδολογία

Προσπαθούμε να φέρουμε την ανίσωση σε μορφή $f(g(x)) < f(h(x))$ ή $f(g(x)) > f(h(x))$ και εκμεταλλευόμαστε την μονοτονία της f ώστε να καταλήξουμε σε απλούστερη ανίσωση $g(x) < h(x)$ ή $g(x) > h(x)$.

Παράδειγμα 7.

A) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , η g είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ και ισχύει

$f(x) > 0, g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{\ln x}{\eta \mu x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Γ) Αποδείξτε ότι για κάθε α, β στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $\alpha^{\eta \mu \beta} < \beta^{\eta \mu \alpha}$.

Λύση

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι:

f γνησίως αύξουσα: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (1)

g είναι γνησίως φθίνουσα και θετική: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}$ (2)

Με πολλαπλασιασμό των (1), (2) αφού πρόκειται για θετικούς αριθμούς έχουμε:

$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \Leftrightarrow \frac{f}{g}(x_1) < \frac{f}{g}(x_2)$ το οποίο σημαίνει ότι η $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

B) Η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα και θετική στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ αφού $\frac{\pi}{2} > 1$.

Η συνάρτηση $\eta \mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα και θετική στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Επομένως σύμφωνα με το Α ερώτημα η συνάρτηση $h(x) = \frac{\ln x}{\eta \mu x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Γ) Επειδή η $h(x) = \frac{\ln x}{\eta \mu x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Για κάθε $\alpha, \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ με $\alpha < \beta$ είναι:

$h(\alpha) < h(\beta) \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\eta \mu \alpha} < \frac{\ln \beta}{\eta \mu \beta} \Leftrightarrow \eta \mu \beta \cdot \ln \alpha < \eta \mu \alpha \cdot \ln \beta \Leftrightarrow \ln \alpha^{\eta \mu \beta} < \ln \beta^{\eta \mu \alpha} \Leftrightarrow \alpha^{\eta \mu \beta} < \beta^{\eta \mu \alpha}$.

Μεθοδολογία

Από την μονοτονία κατάλληλης συνάρτησης f , στον ορισμό $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ή $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ επιλέγοντας κατάλληλα x_1, x_2 δημιουργούμε ανίσωση η οποία μετασχηματίζεται στην ζητούμενη. Η συνάρτηση που χρησιμοποιούμε προκύπτει κάθε φορά από μετασχηματισμό της προς απόδειξη ανίσωσης.

Παράδειγμα 8.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln(x - e^2) = 4e^2$ έχει μοναδική λύση.

Λύση

Πρέπει $x - e^2 > 0 \Leftrightarrow x > e^2$.

Ο αριθμός $\rho = 2e^2$ είναι ρίζα της εξίσωσης αφού $2e^2 \ln(2e^2 - e^2) = 2e^2 \ln(e^2) = 4e^2 \ln e = 4e^2$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι μοναδική με την χρήση της μονοτονίας.

(Επειδή ο έλεγχος της μονοτονίας για την $f(x) = x \ln(x - e^2)$ είναι δύσκολος μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε ισοδύναμη ώστε να προκύψει συνάρτηση της οποίας την μονοτονία μπορούμε να εξασφαλίσουμε)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln(x - e^2) - \frac{4e^2}{x}$ με $x \in (e^2, +\infty) = \Delta$.

Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - e^2 < x_2 - e^2 \Leftrightarrow \ln(x_1 - e^2) < \ln(x_2 - e^2) \quad (1).$$

$$\text{Επίσης } e^2 < x_1 < x_2 \stackrel{x > e^2 > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{4e^2}{x_1} < -\frac{4e^2}{x_2} \quad (2).$$

Με πρόσθεση των (1), (2) προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x - e^2) - \frac{4e^2}{x} = 0 \Leftrightarrow x \ln(x - e^2) = 4e^2$ έχει μοναδική λύση.

Μεθοδολογία

Αφού εξασφαλίσουμε με κάποιο τρόπο μια λύση της εξίσωσης (π.χ. προφανής) μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε ισοδύναμη ώστε να προκύψει μονότονη συνάρτηση. Η μονοτονία της συνάρτησης εξασφαλίζει την μοναδικότητα.

Παράδειγμα 9.

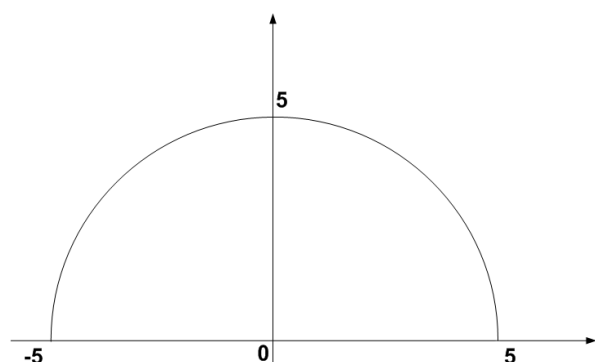
A) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{25-x^2}$.

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1821}{x^4 + 1821}$ παρουσιάζει μέγιστο.

Λύση

A) Για να ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η $f(x)$ πρέπει

$$25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 25 \Leftrightarrow |x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-5, 5] = A.$$



Αν $-5 \leq x_1 < x_2 \leq 0$ τότε

$$x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow 25 - x_1^2 < 25 - x_2^2 \stackrel{x \in [-5, 0]}{\Leftrightarrow} \sqrt{25 - x_1^2} < \sqrt{25 - x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Αν $0 \leq x_1 < x_2 \leq 5$ τότε

$$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 25 - x_1^2 > 25 - x_2^2 \stackrel{x \in [0, 5]}{\Leftrightarrow} \sqrt{25 - x_1^2} > \sqrt{25 - x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-5, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 5]$.

Άρα αν $x < 0$ θα είναι $f(x) < f(0)$ (αφού $f \uparrow$ στο $[-5, 0]$),

αν $x > 0$ θα είναι $f(x) < f(0)$ (αφού $f \downarrow$ στο $[0, 5]$),

αν $x = 0$ θα είναι $f(x) = f(0) = 5$.

Οπότε για κάθε $x \in [-5, 5]$ ισχύει $f(x) \leq f(0) = 5$ δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $x = 0$ με μέγιστη τιμή ίση με $f(0) = 5$.

Επίσης παρατηρούμε ότι $\sqrt{25 - x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in [-5, 5]$ και επιπλέον $f(-5) = f(5) = 0$.

Δηλαδή για κάθε $x \in [-5, 5]$ ισχύει $f(x) \geq f(-5) = f(5) = 0$ δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στις θέσεις $x = -5$ και $x = 5$ με ελάχιστη τιμή ίση με $f(-5) = f(5) = 0$.

B) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $0 \leq x^4 \Leftrightarrow 1821 \leq 1821 + x^4 \Leftrightarrow \frac{1821}{x^4 + 1821} \leq 1$ και επιπλέον $f(0) = 1$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \leq f(0) = 1$ δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $x = 0$ με μέγιστη τιμή $f(0) = 1$.

Μεθοδολογία

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \gamma]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\gamma, \beta]$ τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στην θέση γ με μέγιστη τιμή $f(\gamma)$. Επίσης αν αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \leq \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $\gamma \in \Delta$ ώστε $f(\gamma) = \kappa$ τότε η f έχει μέγιστη τιμή στο Δ το κ .

Παράδειγμα 10.

- A) Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(f(x)) + g(x) = 0$ (1) τότε να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .
- B) Αν $f(f(x)) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Λύση

A) Με άτοπο: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

1^η Περίπτωση: f γνησίως αύξουσα στο Δ .

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -g(x_1) < -g(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2$$

ΑΤΟΠΟ !

2^η Περίπτωση: f γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -g(x_1) < -g(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2$$

ΑΤΟΠΟ !

Σε κάθε περίπτωση οδηγούμαστε σε άτοπο άρα η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

B) Εφαρμογή του Α ερωτήματος όπου $g(x) = x$ η οποία είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$ δηλαδή γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη υποθέτουμε ότι είναι και για $x_1 < x_2$ κατασκευαστικά και με χρήση των δεδομένων καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 11.

A. Αν οι f, g, h είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h \circ g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $\phi(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$.

Λύση

A. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

Τότε διαδοχικά έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ (αφού f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ (αφού g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow h(g(f(x_1))) > h(g(f(x_2)))$ (αφού h γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow (h \circ g \circ f)(x_1) > (h \circ g \circ f)(x_2)$

Οπότε η συνάρτηση $h \circ g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B. Αν $f(x) = 2 - x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ και $h(x) = -x$ τότε $\phi = h \circ g \circ f$.

Επιπλέον: f, h γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$ γιατί είναι της μορφής $f(x) = ax + b$ με $a = -1 < 0$, g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ διότι είναι της μορφής a^x με $0 < a < 1$.

Σύμφωνα με το A η $\phi = h \circ g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Από την υπόθεση $x_1 < x_2$ για τυχαία x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού των f, g, h και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία τους καταλήγουμε σε ανίσωση της μορφής $(h \circ g \circ f)(x_1) > (h \circ g \circ f)(x_2)$ ή $(h \circ g \circ f)(x_1) < (h \circ g \circ f)(x_2)$. Γενικά η σύνθεση μιας γνησίως φθίνουσας με μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ δίνει γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ ενώ η σύνθεση μιας γνησίως αύξουσας με μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ δίνει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση, αν η C_f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία με τετμημένη -2 και τεταγμένη 1 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

β) Αν g γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, να εξετάσετε την μονοτονία της $g \circ g$ και της $f \circ g$.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται (τέμνει τους άξονες) από τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(0,1)$.

Παρατηρούμε ότι για $x_A < x_B$ ($-2 < 0$), ισχύει $y_A < y_B$ ($0 < 1$) και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα.

Μεθοδολογία

Αν f γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η C_f διέρχεται από 2 σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, τότε, αν $(x_A - x_B), (y_A - y_B)$ ομόσημοι η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ αν $(x_A - x_B), (y_A - y_B)$ ετερόσημοι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Επειδή η g γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow g(g(x_1)) < g(g(x_2)) \Leftrightarrow (g \circ g)(x_1) < (g \circ g)(x_2)$ άρα η $g \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{f \text{ γν. αυξ.}} f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2)$ άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Μεθοδολογία

Αν g γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε με την χρήση των ανισοτήτων που προκύπτουν από τον ορισμό της μονοτονίας αποδεικνύεται ότι η $g \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα. Ενώ αν f, g γνησίως μονότονες με διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε αποδεικνύεται ότι η $f \circ g$ (και η $g \circ f$) είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα 2.

Έστω συνάρτηση $f(x) = -2x^7 - 3x + 5$ με $D_f = [0, +\infty)$.

α) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + \frac{3}{4}) > 0$ στο $[0, +\infty)$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^7 < x_2^7 \Leftrightarrow -2x_1^7 > -2x_2^7 \text{ και } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2$$

$$\text{άρα } -2x_1^7 - 3x_1 > -2x_2^7 - 3x_2 \Leftrightarrow -2x_1^7 - 3x_1 + 5 > -2x_2^7 - 3x_2 + 5 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μεθοδολογία

Αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ προκύπτει ισοδύναμα, με εφαρμογή των ιδιοτήτων στις ανισότητες, $f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ αν προκύψει $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f θα είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, δηλαδή μια ρίζα της f είναι το $x_1 = 1$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη ρίζα x_2 της εξίσωσης ($f(x_2) = 0$).

Αν $x_2 < x_1 = 1$ επειδή f γνησίως φθίνουσα τότε $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_2) \neq 0$ άτοπο.

Αν $x_2 > x_1 = 1$ επειδή f γνησίως φθίνουσα τότε $f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_2) \neq 0$ άτοπο.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $[0, +\infty)$.

Μεθοδολογία

Βρίσκουμε μία προφανή ρίζα x_1 της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο D_f , υποθέτουμε ότι έχει και 2^η ρίζα x_2 ($x_2 < x_1$ ή $x_2 > x_1$) και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη καταλήγουμε σε κάτι άτοπο ($f(x_2) \neq 0$).

γ) $x^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ άρα $x^2 + \frac{3}{4} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$f(x^2 + \frac{3}{4}) > 0 \Leftrightarrow f(x^2 + \frac{3}{4}) > f(1) \stackrel{f \text{ γν. φθίν.}}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{3}{4} < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

και επειδή $x \geq 0$ τελικά η λύση της ανίσωσης είναι: $0 \leq x < \frac{1}{2}$.

Μεθοδολογία

Αν f γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) και $f(g(x)) > f(x_1)$ με $g(A) \subseteq D_f$, $x_1 \in D_f$ τότε $g(x) > x_1$ (ή $g(x) < x_1$ αντίστοιχα) και ισοδύναμα λύνουμε την ανίσωση.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^5(x) - e^x = 2 - 6f^3(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

Η αρχική σχέση γίνεται $f^5(x) - e^x = 2 - 6f^3(x) \Leftrightarrow f^5(x) + 6f^3(x) = e^x + 2$ (1).

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ θα ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow f^5(x_1) > f^5(x_2) \quad (v = 5, \text{ περιττός εκθέτης})$$

$$(2) \Leftrightarrow f^3(x_1) > f^3(x_2) \Leftrightarrow 6f^3(x_1) > 6f^3(x_2) \quad (v = 3, \text{ περιττός εκθέτης})$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f^5(x_1) + 6f^3(x_1) > f^5(x_2) + 6f^3(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^{x_1} + 2 > e^{x_2} + 2 \Leftrightarrow e^{x_1} > e^{x_2} \stackrel{e^x \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2$$

Άτοπο, άρα η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συναρτησιακή σχέση για μια συνάρτηση f , και θέλουμε να δείξουμε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα (ή γνησίως αύξουσα) στο A αρκεί να υποθέσουμε ότι είναι, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$ (ή $f(x_1) < f(x_2)$ αντίστοιχα) και να καταλήξουμε σε κάτι άτοπο.

Ημερομηνία τροποποίησης: 1/12/2013