

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

[Υποκεφάλαιο 1.3 - Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ είναι “1-1”.

Λύση

α. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .

Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία $x-3 \neq 0$ ή, ισοδύναμα, για $x \neq 3$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{3\}$

β. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1-1}{x_1-3} = \frac{2x_2-1}{x_2-3} \Leftrightarrow (2x_1-1)(x_2-3) = (2x_2-1)(x_1-3)$$

ή $5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f είναι “1-1”.

Μεθοδολογία

α) Τον τρόπο επίλυσης με τη χρήση του ορισμού «αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ » τον χρησιμοποιούμε κυρίως σε θεωρητικές ασκήσεις.

β) Τον τρόπο επίλυσης με τη χρήση του ισοδύναμου ορισμού «αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$ » τον χρησιμοποιούμε κυρίως όταν μας δίδεται ο τύπος της συνάρτησης.

Παράδειγμα 2.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x^3$ είναι “1-1”.

Λύση

α. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού. Παρατηρούμε ότι προφανώς $A = \mathbb{R}$.

β. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{x_1}{2}} < e^{\frac{x_2}{2}} \quad (1)$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad (2)$$

και προσθέτοντας κατά μέλη την (1) και την (2) λαμβάνουμε:

$$e^{\frac{x_1}{2}} + x_1^3 < e^{\frac{x_2}{2}} + x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και “1-1”}.$$

Παράδειγμα 3.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x - \sqrt{x^3}$ με $x \geq 0$ δεν είναι “1-1”.

Λύση

Θα κάνουμε χρήση του ορισμού, δηλαδή αρκεί να βρούμε $x_1, x_2 \geq 0$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία όμως $f(x_1) = f(x_2)$.

Παρατηρούμε ότι $1 \neq 0$, όμως $f(1) = 0$ και $f(0) = 0$.

Άρα η f δεν είναι 1-1.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2e^{x+3} + 1$.

Να ορίσετε την f^{-1} .

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R}$.

β. Εξετάζουμε αν η f είναι “1-1”. (Για να είναι μια συνάρτηση αντιστρέψιμη πρέπει απαραίτητα να είναι 1-1. Προς τούτο έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

$$2e^{x_1+3} + 1 = 2e^{x_2+3} + 1 \Leftrightarrow e^{x_1+3} = e^{x_2+3} \Leftrightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι “1-1”, συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Για να ορίσουμε την f^{-1} , αρκεί να βρούμε:

1. Το πεδίο ορισμού της.
2. Τον τύπο της.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . Άρα στη συγκεκριμένη άσκηση κάνουμε τα παρακάτω βήματα:

1. Δημιουργούμε την εξίσωση $y = f(x)$, δηλαδή $y = 2e^{x+3} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Λύνουμε ως προς x την $e^{x+3} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x+3 = \ln \frac{y-1}{2}$ με $y \in (1, +\infty)$. (1)

3. Εναλλάσσουμε τις μεταβλητές στη σχέση (1) και έχουμε:

$$y = \ln \frac{x-1}{2} - 3 \text{ με } x > 1.$$

4. Άρα $f^{-1}(x) = \ln \frac{x-1}{2} - 3$ με πεδίο ορισμού της αντιστρόφου το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f(A) = (1, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{2 - x}}$ είναι 1-1.

Λύση

Πρέπει $2 - x \geq 0$ και $3 - \sqrt{2 - x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x$ και $3 \geq \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow 2 \geq x$ και $9 \geq 2 - x \Leftrightarrow$

$2 \geq x$ και $x \geq -7$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = D_f = [-7, 2]$.



$$\text{Αν } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{3 - \sqrt{2 - x_1}} = \sqrt{3 - \sqrt{2 - x_2}} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2 - x_1} = 3 - \sqrt{2 - x_2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2 - x_1} = \sqrt{2 - x_2} \Leftrightarrow 2 - x_1 = 2 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η } f \text{ είναι 1-1.}$$

Μεθοδολογία

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι 1-1 αν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

α) αν $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ και με αντιθετοαντιστροφή έχουμε

β) αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

γ) η εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x έχει το πολύ μια ρίζα στο A

δ) η f είναι γνησίως μονότονη

ε) αν κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σ' ένα σημείο.

Παράδειγμα 6.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-3| - 2$ είναι 1-1.

Λύση (2 τρόποι επίλυσης)

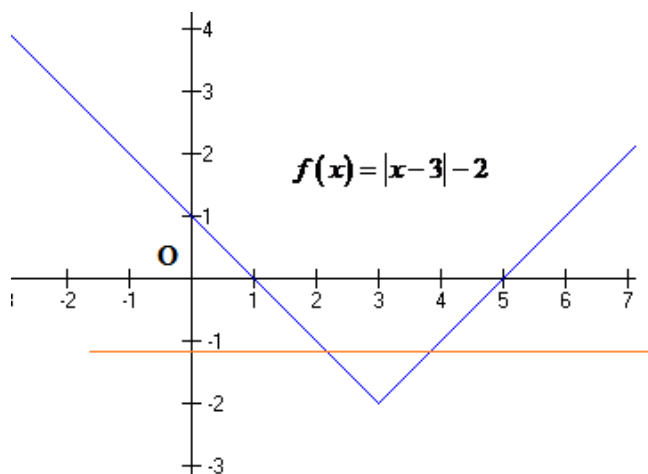
$$\pi.o = A = D_f = \mathbb{R}$$

A' Τρόπος (αλγεβρικά):

Επειδή $f(5) = f(1) = 0$ με $5 \neq 1$ η f δεν είναι 1-1.

B' Τρόπος (γεωμετρικά):

Κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και βλέπουμε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα xx' που την τέμνει σε δύο σημεία άρα δεν είναι 1-1.



Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι 1-1:

- Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- Να υπάρχει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα xx' που την τέμνει σε δύο τουλάχιστον σημεία.

Παράδειγμα 7.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-1| - 4x$ είναι 1-1.

Λύση (3 τρόποι επίλυσης)

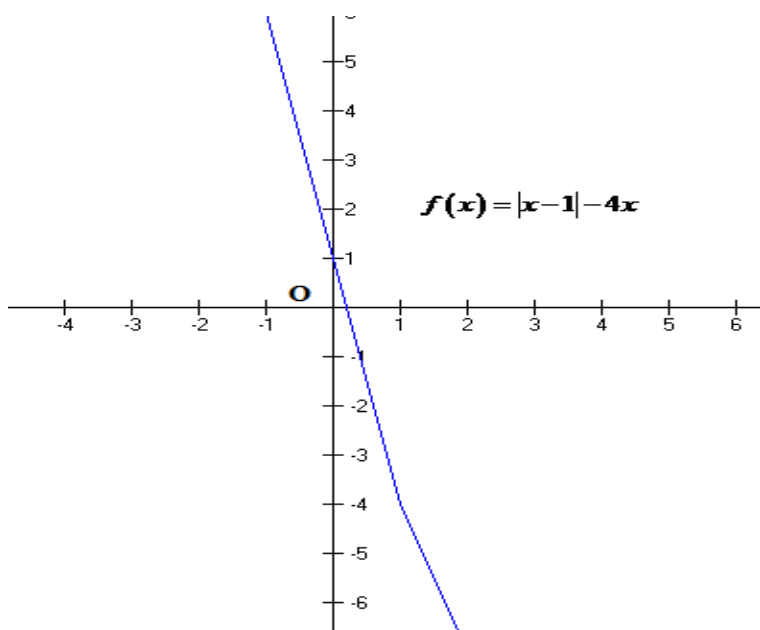
π.ο. = $A = D_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f(x)$ γίνεται $f(x) = \begin{cases} -3x-1, & x \geq 1 \\ -5x+1, & x < 1 \end{cases}$

A' Τρόπος (αλγεβρικά):

- αν $x \geq 1$ τότε $f(x) = -3x-1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1.
(η ευθεία $y = \alpha x + \beta, \alpha < 0$ είναι φθίνουσα)
- αν $x < 1$ τότε $f(x) = -5x+1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1. (η ευθεία $y = \alpha x + \beta, \alpha < 0$ είναι φθίνουσα)
- αν $x_2 < 1 \leq x_1$ τότε $f(x_1) = -3x_1-1 \leq -4$ και $f(x_2) = -5x_2+1 > -4$
άρα έχουμε $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ δηλαδή είναι 1-1.

B' Τρόπος (γεωμετρικά):

- Κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και βλέπουμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο.



Γ' Τρόπος:

αν $x \geq 1$ τότε $f(x) = -3x - 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1

(η ευθεία $y = \alpha x + \beta, \alpha < 0$ είναι φθίνουσα)

αν $x < 1$ τότε $f(x) = -5x + 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 (η ευθεία

$y = \alpha x + \beta, \alpha < 0$ είναι φθίνουσα)

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών του κάθε κλάδου

$$y = f(x) = -3x - 1 / A_1 = [1, +\infty) \Leftrightarrow x = -\frac{y+1}{3} \geq 1 \Leftrightarrow -y-1 \geq 3 \Leftrightarrow -4 \geq y$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(A_1) = (-\infty, -4]$

$$y = f(x) = -5x + 1 / A_2 = (-\infty, 1) \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{5} < 1 \Leftrightarrow 1-y < 5 \Leftrightarrow -4 < y$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(A_2) = (-4, +\infty)$

Η συνάρτηση f είναι 1-1 στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ και επειδή τα επί μέρους σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους γιατί $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset \Rightarrow$ η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

Μεθοδολογία

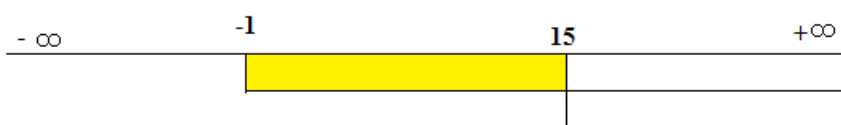
Αν μια συνάρτηση δίνεται με πολλαπλό τύπο και στα επιμέρους διαστήματα είναι 1-1 και τα επί μέρους σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους τότε η f είναι 1-1.

Παράδειγμα 8.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{1+x}}$ είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της f^{-1} .

Λύση

- Πρέπει $x+1 \geq 0$ και $4 - \sqrt{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ και $4 \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x \geq -1$ και $4^2 \geq (\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow x \geq -1$ και $16 \geq x+1 \Leftrightarrow x \geq -1$ και $15 \geq x$ οι ανισότητες συναληθεύουν στο $[-1, 15]$



άρα το πεδίο ορισμού είναι το π.ο. $= A = D_f = [-1, 15]$.

1^ο Βήμα: Αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{4 - \sqrt{x_1+1}} = \sqrt{4 - \sqrt{x_2+1}} \Leftrightarrow 4 - \sqrt{x_1+1} = 4 - \sqrt{x_2+1} \Leftrightarrow \sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1} \Leftrightarrow x_1+1 = x_2+1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1.

2^ο Βήμα: $y = \sqrt{4 - \sqrt{1+x}} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 4 - \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \sqrt{x+1} = 4 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4 - y^2 \geq 0 \\ x+1 = (4 - y^2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (4 - y^2)^2 - 1 \\ 4 - y^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (4 - y^2)^2 - 1, (1) \\ 2 \geq y \geq -2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (4 - y^2)^2 - 1, (1) \\ 2 \geq y \geq 0 \end{cases}$$

3^ο Βήμα : Στην (1) στην θέση του $x \rightarrow y$ και $y \rightarrow x$ άρα η αντίστροφη είναι η

$y = f^{-1}(x) = (4 - x^2)^2 - 1$ με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}} = [0, 2]$, που είναι και το σύνολο τιμών της $f(x)$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την f^{-1} ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α) Εξετάζουμε αν η f είναι 1-1.

β) Λύνουμε την ισότητα $y = f(x)$ σαν εξίσωση ως προς x και παίρνουμε όλα τα y ώστε η εξίσωση $y = f(x)$ να έχει λύση στο πεδίο ορισμού της f το D_f . (Η διαδικασία αυτή μας δίνει και το σύνολο τιμών της f που είναι και το πεδίο ορισμού της f^{-1}).

γ) Τέλος στη θέση του x βάζουμε το y και στη θέση του y το x .

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x < 2 \\ \sqrt{x-2}+2 & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι “1-1”.

Λύση

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

2. Παρατηρούμε ότι η f με $f(x) = 2x+1$ όπου $x \in (-\infty, 2)$ είναι “1-1”, διότι είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, όπως και η f με $f(x) = \sqrt{x-2}+2$ όπου $x \in [2, +\infty)$ για τον ίδιο λόγο στο διάστημα $x \in [2, +\infty)$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν είναι “1-1” στον συνδυασμό των κλάδων, δηλαδή στο πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

Προς τούτο θα βρούμε τα επιμέρους σύνολα τιμών των δύο κλάδων και θα ελέγξουμε αν έχουν κοινά στοιχεία.

Πράγματι

- Για $x < 2$: $y = 2x+1 \Leftrightarrow \frac{y-1}{2} = x$ δηλαδή $\frac{y-1}{2} < 2 \Leftrightarrow y-1 < 4 \Leftrightarrow y < 5$.

Άρα $f(A_1) = (-\infty, 5)$ όπου $A_1 = (-\infty, 2)$.

- Για $x \geq 2$: $y = \sqrt{x-2}+2 \Leftrightarrow y-2 = \sqrt{x-2}$, όμως πρέπει $y-2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$.

Οπότε $(y-2)^2 = x-2 \Leftrightarrow x = 2 + (y-2)^2$.

Θα πρέπει όμως $2 + (y-2)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (y-2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $y \geq 2$.

Άρα $f(A_2) = [2, +\infty)$ όπου $A_2 = [2, +\infty)$.

Επειδή όμως τα δύο επιμέρους σύνολα τιμών έχουν κοινά στοιχεία αυτά του διαστήματος $[2, 5)$ η συνάρτηση μας δεν είναι “1-1”, διότι για $x_1 \neq x_2$ με $x_1 \in (-\infty, 2)$ και $x_2 \in [2, +\infty)$ υπάρχει δυνατότητα να έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$, $f(x_1), f(x_2) \in [2, 5]$. Από (1) και (2) είναι μόνο “1-1” κατά διαστήματα.

Παράδειγμα 2.

Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{\sqrt{x}+2}{x+2} = x - \sqrt{x}$ με $x > 0$.

Λύση

Εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων στο πρώτο μέλος της εξίσωσης λαμβάνουμε:

$$\ln \frac{\sqrt{x}+2}{x+2} = x - \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x}+2) - \ln(x+2) = x + 2 - (\sqrt{x}+2)$$

$$\text{ή } \ln(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}+2) = \ln(x+2) + (x+2) \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln x + x$ με $x \in (0, +\infty)$. Τότε από την (1) έχουμε:

$$f(\sqrt{x}+2) = f(x+2).$$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως άθροισμα γνησίως αυξουσών συναρτήσεων. Άρα θα είναι και “1-1”. Άρα:

$$\sqrt{x}+2 = x+2 \text{ και } \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0.$$

Επειδή όμως $x > 0$ λαμβάνουμε $x = 1$.

Μεθοδολογία

Αν μας δοθεί μία εξίσωση που έχει τη μορφή $f(g(x)) = f(h(x))$ ή μπορεί με πράξεις να πάρει αυτή τη μορφή και η f είναι συνάρτηση “1-1”, τότε λύνουμε την πιο απλή εξίσωση $g(x) = h(x)$ εφόσον ισχύει $f(g(x)) = f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x) + e^{\frac{x}{3}-2} = (f \circ f)(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να εξετάσετε αν η } f \text{ είναι "1-1".}$$

Λύση

Αρχικά θα δώσουμε όσο πιο απλά γίνεται έναν ορισμό της έννοιας «συναρτησιακές σχέσεις».

A. Γενικά τις σχέσεις που απεικονίζουν την επίδραση ενός μεγέθους σε ένα άλλο τις αποκαλούμε συναρτησιακές σχέσεις.

B. Συναρτησιακή σχέση μιας συνάρτησης f είναι κάθε ισότητα ή ανισότητα που ικανοποιεί η f για κάθε τιμή των μεταβλητών της και που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (1). Τότε:

$f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ (2), αφού f συνάρτηση, και αφαιρώντας τις (1), (2) κατά μέλη λαμβάνουμε:

$f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2)$ και από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει:

$$e^{\frac{x_1}{3}-2} = e^{\frac{x_2}{3}-2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{3} - 2 = \frac{x_2}{3} - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα η } f \text{ είναι "1-1".}$$

Παράδειγμα 4.

Να αποδείξετε ότι η $f : [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 4x + 1$ είναι “1-1” και να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

Λύση

α. Ο τύπος της συνάρτησης μετασχηματίζεται ισοδύναμα ως εξής:

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 4x + 1 + 3 - 3 \Leftrightarrow f(x) = (x + 2)^2 - 3$$

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in [-2, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Λαμβάνουμε

$$(x_1 + 2)^2 - 3 = (x_2 + 2)^2 - 3 \Leftrightarrow (x_1 + 2)^2 = (x_2 + 2)^2 \Leftrightarrow |x_1 + 2| = |x_2 + 2| \text{ και επειδή}$$

$$x_1, x_2 \geq -2 \text{ προκύπτει } x_1 + 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι “1-1”}.$$

β. Θα βρούμε τώρα την αντίστροφη.

$$y = (x + 2)^2 - 3 \Leftrightarrow y + 3 = (x + 2)^2. \text{ Παρατηρούμε ότι πρέπει } y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -3$$

Δηλαδή $f(A) = [-3, +\infty)$ όπου $A = [-2, +\infty)$.

Οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται $\sqrt{y+3} = |x+2| \Leftrightarrow \sqrt{y+3} = x+2$ διότι $x \geq -2$.

Άρα $x = \sqrt{y+3} - 2$ και με εναλλαγή μεταβλητών $y = \sqrt{x+3} - 2$ με $x \geq -3$.

Δηλαδή $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 2$ με πεδίο ορισμού το $f(A) = [-3, +\infty)$ όπου $A = [-2, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in (-2, 0] \\ 3x - 7, & x \in (0, 3) \end{cases}$ είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της.

Λύση (3 τρόποι επίλυσης)

- Εξέταση του 1-1.

Α' Τρόπος (αλγεβρικά):

- Έστω $x_1, x_2 \in (-2, 0]$, αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ και επειδή $x_1, x_2 < 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 στο $(-2, 0]$.
- Έστω $x_1, x_2 \in (0, 3)$ αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 7 = 3x_2 - 7 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 στο $(0, 3)$.
- Έστω $-2 < x_1 \leq 0 < x_2 < 3$ δηλαδή $x_1 \neq x_2$.

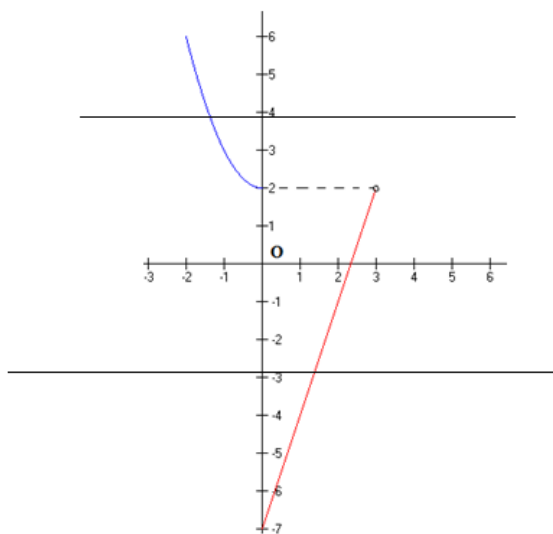
$$\text{Από την } -2 < x_1 \leq 0 \Rightarrow 4 > x_1^2 \geq 0 \Rightarrow 6 > x_1^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow 6 > f(x_1) \geq 2, \quad (1)$$

$$\text{Από την } 0 < x_2 < 3 \Rightarrow 0 < 3x_2 < 9 \Rightarrow -7 < 3x_2 - 7 < 9 - 7 = 2 \Rightarrow -7 < f(x_2) < 2, \quad (2)$$

Έχουμε λοιπόν από τις (1), (2) ότι $-7 < f(x_2) < 2 \leq f(x_1) < 6$ άρα από την $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1-1.

Β' Τρόπος (Γραφικά):

Κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και βλέπουμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f στο πολύ σε ένα σημείο.



Γ' Τρόπος:

Εξέταση του 1-1 και Εύρεση της $f^{-1}(x)$.

- Έστω $x_1, x_2 \in (-2, 0]$, αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ και επειδή $x_1, x_2 < 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 στο $(-2, 0]$.
- Έστω $x_1, x_2 \in (0, 3)$ αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 7 = 3x_2 - 7 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 στο $(0, 3)$

- Αν $x \in (-2, 0] \Rightarrow f(x) = x^2 + 2 \Leftrightarrow y = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = y - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{y-2} \\ y \geq 2 \end{cases}$ και επειδή

$$-2 < x \leq 0, \text{ θα είναι } 0 \leq x^2 < 4, \text{ επομένως } 0 \leq y - 2 < 4 \Leftrightarrow 2 \leq y < 6.$$

$$\text{Άρα } x = -\sqrt{y-2}, \quad 2 \leq y < 6, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}, \quad 2 \leq x < 6$$

- Αν $x \in (0, 3) \Rightarrow f(x) = 3x - 7$ ή $y = 3x - 7 \Leftrightarrow x = \frac{y+7}{3}$ και επειδή $0 < x < 3 \Rightarrow 0 < \frac{y+7}{3} < 3 \Rightarrow 0 < y+7 < 9 \Rightarrow -7 < y < 2$ άρα το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $A_2 = (0, 3)$ είναι το $f(A_2) = (-7, 2)$.

Η συνάρτηση f είναι 1-1 στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ και επειδή τα επί μέρους σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους γιατί $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$ η f είναι 1-1.

$$\text{Και η αντίστροφη της είναι } f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-2}, & 2 \leq x < 6 \\ \frac{x+7}{3}, & -7 < x < 2 \end{cases}.$$

Μεθοδολογία

- Αν μια συνάρτηση δίνεται με πολλαπλό τύπο και στα επιμέρους διαστήματα είναι 1-1 και τα επί μέρους σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους τότε η f είναι 1-1.
- Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης που δίνεται με πολλαπλό τύπο, βρίσκουμε την αντίστροφη f^{-1} για τον κάθε κλάδο της συνάρτησης.

Παράδειγμα 6.

α) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = 3 + \sqrt{x-3}$.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f, f^{-1} .

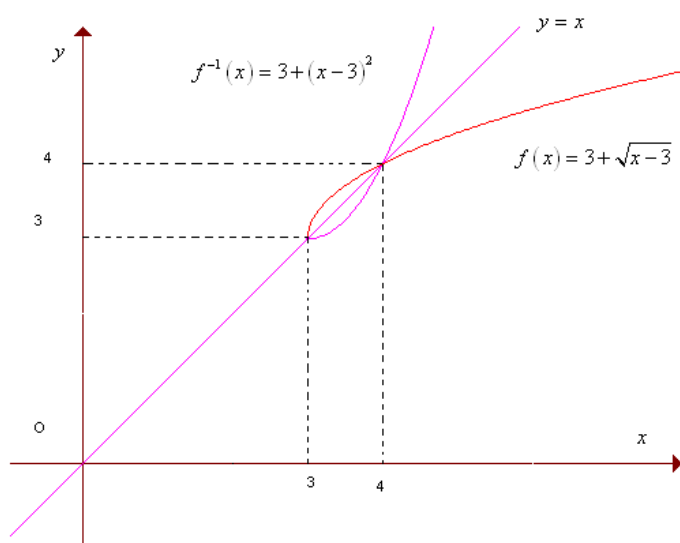
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

Λύση

α) Πρέπει $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = D_f = [3, +\infty)$

1^ο Βήμα: Αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3 + \sqrt{x_1-3} = 3 + \sqrt{x_2-3} \Rightarrow \sqrt{x_1-3} = \sqrt{x_2-3} \Rightarrow x_1-3 = x_2-3 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1.

2^ο Βήμα: $y = 3 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow y-3 = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3 \geq 0 \\ (y-3)^2 = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ x = 3 + (y-3)^2 \end{cases}, \text{ (1)}$



3^ο Βήμα: Στην (1) και στην θέση του $x \rightarrow y$ και στην θέση του $y \rightarrow x$ άρα η αντίστροφη είναι η $f^{-1}(x) = 3 + (x-3)^2$ με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}} = [3, +\infty)$, που είναι και το σύνολο τιμών της f .

β) Η γραφική παράσταση της $f^{-1}(x) = 3 + (x-3)^2$ είναι παραβολή άρα η γραφική παράσταση της $f(x) = 3 + \sqrt{x-3}$ θα είναι συμμετρική ως προς τη διχοτόμο της γωνίας του 1^{ου} και του 3^{ου} τεταρτημορίου.

γ) Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ (επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα) $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$
 $\Leftrightarrow 3 + (x-3)^2 = x \Leftrightarrow (x-3)^2 = x-3 \Leftrightarrow (x-3)(x-3-1) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$
ή $x = 4$.

Μεθοδολογία

- Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ή της συνάρτησης f^{-1} , σχεδιάζουμε πρώτα την συνάρτηση που μας είναι γνωστή η γραφική παράσταση της και στην συνέχεια σχεδιάζουμε την άλλη, η οποία είναι συμμετρική προς την ευθεία $y = x$.

Παράδειγμα: Αν $f(x) = \sqrt{x}$ τότε η $f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι η γνωστή παραβολή.

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f , $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$ και αντί να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = f^{-1}(x), \text{ αρκεί να λύσουμε το σύστημα } \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases}$$

ή την εξίσωση $f(x) = x$ ή την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

Παράδειγμα 7.

α) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \ln(x-1) - 3$.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f, f^{-1} και με την βοήθεια αυτών να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

Λύση

α) Πρέπει $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = D_f = (1, +\infty)$.

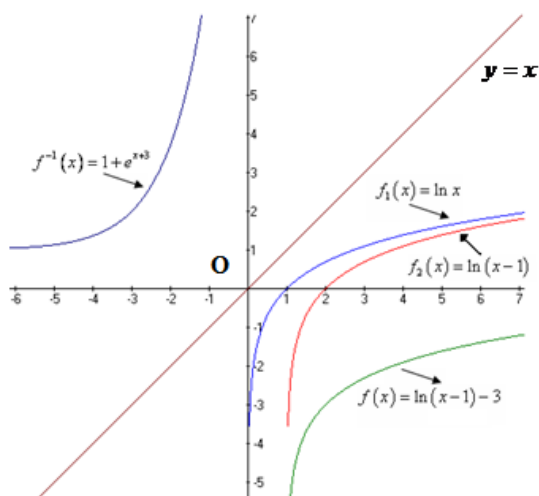
1^ο Βήμα: Αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln(x_1-1) - 3 = \ln(x_2-1) - 3 \Rightarrow \ln(x_1-1) = \ln(x_2-1)$
 $\Leftrightarrow x_1-1 = x_2-1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1.

2^ο Βήμα: $y = \ln(x-1) - 3 \Leftrightarrow y+3 = \ln(x-1) \Leftrightarrow x-1 = e^{y+3} \Leftrightarrow x = 1 + e^{y+3}, (1)$

3^ο Βήμα: Στην (1) και στην θέση του $x \rightarrow y$ και στη θέση $y \rightarrow x$ άρα η αντίστροφη είναι η $f^{-1}(x) = 1 + e^{x+3}$ με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, που είναι και το σύνολο τιμών της f .

β)

- Η γραφική παράσταση της $f^{-1}(x) = 1 + e^{x+3}$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $f_1(x) = e^x$ αν την μετατοπίσουμε παράλληλα προς τον άξονα $x'x$ αριστερά κατά 3 και στη συνέχεια την μετατοπίζουμε παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και προς τα πάνω κατά 1 άρα η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x-1) - 3$ θα είναι συμμετρική ως προς τη διχοτόμο της γωνίας του 1^{ου} και του 3^{ου} τεταρτημόριου.
- Από το σχήμα βλέπουμε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ δεν τέμνονται, άρα η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι αδύνατη.



Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ή της συνάρτησης f^{-1} , σχεδιάζουμε πρώτα την συνάρτηση που μας είναι γνωστή η γραφική παράσταση της και στην συνέχεια σχεδιάζουμε την άλλη, η οποία είναι συμμετρική προς την ευθεία $y = x$.

Παράδειγμα 8.

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(3,2)$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης

β) Να βρείτε τους αριθμούς $f^{-1}(5)$ και $f^{-1}(2)$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(3+f(x^2+2x)) > 2$.

Λύση

α) Επειδή η f διέρχεται από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(3,2)$ θα έχουμε $f(2)=5$ και $f(3)=2$. Έτσι έχουμε $3 > 2 \Rightarrow f(3)=2 < f(2)=5$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη άρα θα είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $f(2)=5 \Leftrightarrow 2=f^{-1}(5)$ και $f(3)=2 \Leftrightarrow 3=f^{-1}(2)$

γ) Οι συναρτήσεις f, f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (λόγω συμμετρίας ως προς τη διχοτόμο ($y=x$) της γωνίας του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου)

Η ανισότητα $f^{-1}(3+f(x^2+2x)) > 2 \Leftrightarrow f^{-1}(3+f(x^2+2x)) > f^{-1}(5) \xLeftrightarrow{f \text{ γν.φθ.}} 3+f(x^2+2x) < 5 \Leftrightarrow f(x^2+2x) < 2 = f(3) \xLeftrightarrow{f^{-1} \text{ γν.φθ.}} x^2+2x > 3 \Leftrightarrow x^2+2x-3 > 0 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > 1$.

Μεθοδολογία

Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη, και θέλουμε να βρούμε το είδος της μονοτονίας της, αρκεί να βρούμε την διάταξη δύο τιμών της.

Παράδειγμα 9.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λυθεί η εξίσωση $x^5 + x^3 + x = 3$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{5x} + e^{3x} + e^x < 3$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σαν άθροισμα των αυξουσών συναρτήσεων x^5 , x^3 , $x - 3$ άρα η f είναι 1-1

β) $x^5 + x^3 + x = 3 \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1)$ και επειδή η f είναι 1-1 θα έχουμε μοναδική ρίζα την $x_0 = 1$.

γ) Η συνάρτηση $g(x) = e^x$ και η f είναι γνησίως αύξουσες άρα και η σύνθεση τους

$f(g(x)) = e^{5x} + e^{3x} + e^x - 3$ θα είναι γνησίως αύξουσα

$e^{5x} + e^{3x} + e^x < 3 \Leftrightarrow e^{5x} + e^{3x} + e^x - 3 < 0 \Leftrightarrow f(g(x)) < f(g(0)) \Leftrightarrow$

$(f \circ g)(x) < (f \circ g)(0) \xRightarrow{(f \circ g) \text{ γν. αυξ.}} x < 0$.

Μεθοδολογία

- Αν δύο συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες τότε και το άθροισμά τους είναι γνησίως αύξουσα (άσκηση του βιβλίου) και η σύνθεση τους είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν δύο συναρτήσεις είναι γνησίως φθίνουσες τότε και το άθροισμά τους είναι γνησίως φθίνουσα και η σύνθεση τους είναι γνησίως αύξουσα.

Παράδειγμα 10.

(Γενικές Εξετάσεις 1998)

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$.

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \\ f^3(x_1) = f^3(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2)$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα η } f \text{ είναι 1-1.}$$

$$\beta) f(2x^3 + x) = f(4 - x) \xrightarrow{f} 2x^3 + x = 4 - x \Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0, (1) \text{ η εξίσωση}$$

(1) έχει προφανή ρίζα την $x_0 = 1$ και επειδή η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x - 2$ είναι γνησίως αύξουσα (σαν άθροισμα των αυξουσών συναρτήσεων x^3 και $x - 2$) η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Μεθοδολογία

Στις ασκήσεις με δοσμένες συναρτησιακές σχέσεις, όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι “1-1”, ξεκινάμε με $f(x_1) = f(x_2)$ και με κατάλληλους μετασχηματισμούς και με τη χρήση της δοσμένης σχέσης καταλήγουμε στη σχέση $x_1 = x_2$.

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$, (1) και $f(x) = x$, (2) είναι ισοδύναμες (έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων)

Λύση

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ένας αριθμός έτσι ώστε να είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ άρα θα έχουμε $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ (3). Θα δείξουμε ότι ο αριθμός x_0 είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$ δηλαδή θα ισχύει $f(x_0) = x_0$. Έστω ότι $f(x_0) > x_0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f^{-1}(x_0) > x_0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε $f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Leftrightarrow x_0 > f(x_0)$ άτοπο γιατί υποθέσαμε $f(x_0) > x_0$. Ομοίως άτοπο είναι αν $f(x_0) < x_0$ άρα $f(x_0) = x_0$ άρα κάθε λύση της (1) είναι και λύση της (2).
- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ένας αριθμός έτσι ώστε να είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ άρα θα έχουμε $f(x_0) = x_0$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός x_0 είναι και ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ δηλαδή θα ισχύει $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ (3). Έχουμε $f(x_0) = x_0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x_0 = f^{-1}(x_0)$ άρα $f(x_0) = f^{-1}(x_0) = x_0$ άρα κάθε λύση της (2) είναι και λύση της (1).

Μεθοδολογία

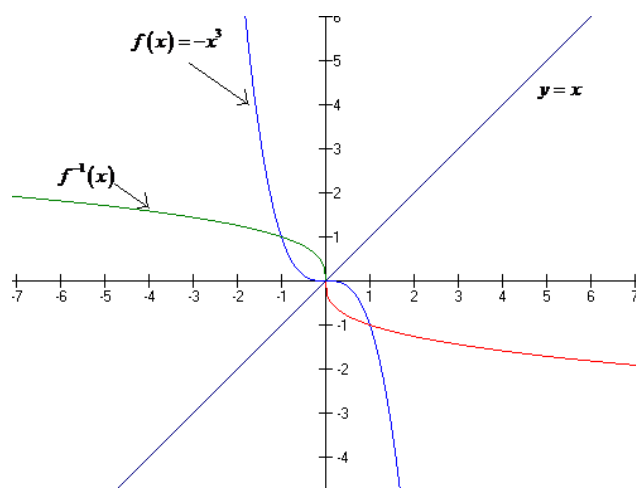
Αν η $f(x)$ δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι δυνατόν να βρίσκονται στη διχοτόμο $y = x$ αλλά και εκτός αυτής.

Παράδειγμα 1^ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ η οποία είναι 1-1 και η αντίστροφη

της είναι $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ συνεπώς η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ (1) αληθεύει για κάθε,

$x \in \mathbb{R}$ ενώ η εξίσωση $f(x) = x$ (2) αληθεύει μόνο για $x = -1, 0, 1$ άρα οι εξισώσεις (1) και (2) δεν είναι ισοδύναμες και αυτό ισχύει επειδή η f δεν είναι γνησίως αύξουσα

Παράδειγμα 2^ο:



Παράδειγμα 2.

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει $(f \circ f)(x) = -x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι 1-1.

β) Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ) Η συνάρτηση f είναι περιττή.

Λύση

α) Η σύνθεση $f \circ f$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ γιατί το πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1.

β) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα τότε αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \xRightarrow{f \text{ γν. αυξ}} f(f(x_1)) < f(f(x_2))$

$\Rightarrow -x_1 < -x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$ άτοπο, ομοίως άτοπο είναι αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι στη θέση του $x \rightarrow f(-x) \Rightarrow (f \circ f)(f(-x)) = -f(-x)$ ή

$f((f \circ f)(-x)) \stackrel{(1)}{=} -f(-x)$ ή $f(f(x)) = -f(-x)$ ή $f(-x) = -f(x)$ άρα η f είναι περιττή.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται μια σχέση για την f που έχει και σύνθεση και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι 1-1, ξεκινάμε πάντα με «έστω ότι ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ » και με κατασκευαστικό τρόπο καταλήγουμε $x_1 = x_2$.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 0$, να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Λύση

α) Για $x = 0$ και $y = 0$ έχουμε $f(0+0) = f(0) + f(0)$ ή $f(0) = 0$.

β) Στη θέση του y βάζουμε $-x$ και έχουμε $f(x-x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x)$
 $0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ και επειδή ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ η f είναι περιττή.

γ) Έστω ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ έτσι ώστε $f(x_1) = f(x_2)$,

Επειδή $x_1 - x_2 \neq 0$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 0$, θα έχουμε

$$f(x_1 - x_2) \neq 0 \Leftrightarrow f[x_1 + (-x_2)] \neq 0 \Leftrightarrow f(x_1) + f(-x_2) \neq 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ άτοπο, άρα έχουμε ότι αν } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ άρα η } f \text{ είναι 1-1.}$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται μια συναρτησιακή σχέση, βάζουμε στις μεταβλητές κατάλληλες τιμές ώστε να προκύψουν τα ζητούμενα.