

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΕΝΝΟΙΑ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ -
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ - ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
[Κεφ 1.4: Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και Ενότητες Όριο και Διάταξη -
Όρια και Πράξεις του κεφ.1.5 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α - Ερωτήσεις θεωρίας

Ερώτηση 1.

Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , τι πρέπει να ελέγχουμε για την f ;

Απάντηση

Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0 ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (x_0, β) ή (α, x_0) .

Ερώτηση 2.

Τι ονομάζουμε πλευρικά όρια μιας συνάρτησης;

Απάντηση

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$$

και διαβάζουμε:

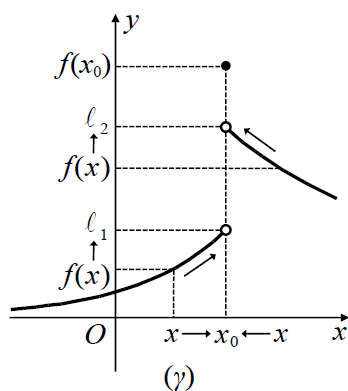
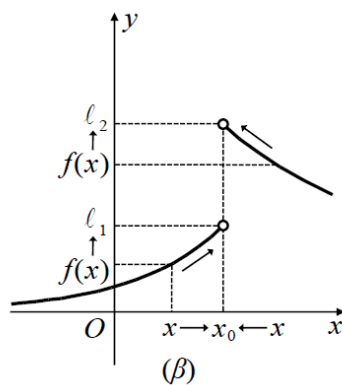
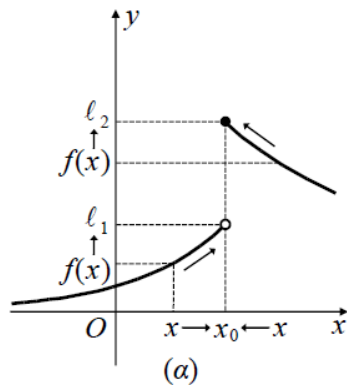
“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1 ”.

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$$

και διαβάζουμε:

“το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2 ”.



Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τους λέμε πλευρικά όρια της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 αριστερό όριο της f στο x_0 , ενώ το ℓ_2 δεξιό όριο της f στο x_0 .

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

Ερώτηση 3.

Πότε μπορούμε να γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$;

Απάντηση

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^4 - 5x^3 + 8 + \alpha) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{-x^5 - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - e^x + \sqrt{-x^2 + 4}) \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^{10} - 2)^{2011} \mid -x^{2011} - 2010 \right]$$

Λύση

$$\text{i) } \text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^4 - 5x^3 + 8 + \alpha) = 3(-1)^4 - 5(-1)^3 + 8 + \alpha = 16 + \alpha .$$

$$\text{ii) } \text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{-x^5 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 6x)}{\lim_{x \rightarrow -2} (-x^5 - 1)} = \frac{3(-2)^2 - 12}{-(-2)^5 - 1} = \frac{12 - 12}{32 - 1} = 0 .$$

$$\text{iii) } \text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - e^x + \sqrt{-x^2 + 4}) = \ln 1 - e^1 + \sqrt{-(1)^2 + 4} = -e + \sqrt{3} .$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^{10} - 2)^{2011} \mid -x^{2011} - 2010 \right] &= \\ &= (1^{10} - 2)^{2011} \mid -1^{2011} - 2010 = (-1)^{2011} \mid -1 - 2010 = -2011 . \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{1 - x^5}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{x^3 + (1 - 2e)x^2 + (e^2 - 2e)x + e^2}{2x^2 - ex - e^2}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x+2} - 4x + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Λύση

i) Έστω η συνάρτηση: $g(x) = \frac{x^6 - 1}{1 - x^5}$, για $x \neq 1$.

Για $x = 1$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος, απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$
 άρα πρέπει να βγάλουμε κοινό παράγοντα το $x - 1$ και από τον αριθμητή και από τον παρονομαστή.

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή $x^6 - 1$ με σχήμα Horner.

1	0	0	0	0	0	-1	①
	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	0	

Οπότε ο αριθμητής γίνεται: $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Αλλιώς:

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $-x^5 + 1$ με σχήμα Horner.

-1	0	0	0	0	1	①
	-1	-1	-1	-1	-1	
-1	-1	-1	-1	-1	0	

Οπότε ο παρονομαστής γίνεται: $1 - x^5 = (x - 1)(-x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$.

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^6 - 1}{1 - x^5}$ για $x \neq 1$, γράφεται:

$$g(x) = \frac{x^6 - 1}{1 - x^5} = \frac{(x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(-x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)} =$$

$$= \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{-x^4 - x^3 - x^2 - x - 1}.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{-x^4 - x^3 - x^2 - x - 1} = -\frac{6}{5}.$

ii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + (1-2e)x^2 + (e^2 - 2e)x + e^2}{2x^2 - ex - e^2},$

για $x \neq e$ και $x \neq -\frac{e}{2}.$

Για $x = e$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος, απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, άρα πρέπει να βγάλουμε κοινό παράγοντα το $x - e$ και από τον αριθμητή και από τον παρονομαστή.

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή $x^3 + (1-2e)x^2 + (e^2 - 2e)x + e^2$ με σχήμα Horner.

1	1-2e	e ² -2e	e ²	e
	e	-e ² +e	-e ²	
1	1-e	-e	0	

Οπότε ο αριθμητής γίνεται:

$$x^3 + (1-2e)x^2 + (e^2 - 2e)x + e^2 = (x-e)(x^2 + (1-e)x - e) =$$

$$(x-e)(x-e)(x+1) = (x-e)^2(x+1).$$

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$2x^2 - ex - e^2 = x^2 - ex + x^2 - e^2 = x(x-e) + (x+e)(x-e) = (x-e)(2x+e)$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x^3 + (1-2e)x^2 + (e^2 - 2e)x + e^2}{2x^2 - ex - e^2} =$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{(x-e)^2(x+1)}{(x-e)(2x+e)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{(x-e)(x+1)}{(2x+e)} = \frac{(e-e)(e+1)}{(2e+e)} = \frac{0}{3e} = 0.$$

- iii) Παρατηρούμε ότι για $x = \pi$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος, απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, άρα πρέπει να βγάλουμε κοινό παράγοντα το $x - \pi$ και από τον αριθμητή και από τον παρονομαστή.

1^{ος} Τρόπος:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)(\sqrt{x} + \sqrt{\pi})}{(\sqrt{x} - \sqrt{\pi})(\sqrt{x} + \sqrt{\pi})} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)(\sqrt{x} + \sqrt{\pi})}{x - \pi} = 2\sqrt{\pi}.$$

2^{ος} Τρόπος:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{\pi}^2}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{\pi})(\sqrt{x} + \sqrt{\pi})}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}.$$

- iv) Για $x = 1$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος και έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, άρα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τους συζυγείς τους.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x+2} - 4x + 1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x+2} - (4x - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{7x+2} - (4x - 1)][\sqrt{7x+2} + (4x - 1)](\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)[\sqrt{7x+2} + (4x - 1)]} &= \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left[(\sqrt{7x+2})^2 - (4x - 1)^2\right](\sqrt{x} + 1)}{\left((\sqrt{x})^2 - 1^2\right)[\sqrt{7x+2} + (4x - 1)]} &= \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[7x + 2 - 16x^2 + 8x - 1](\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)[\sqrt{7x+2} + (4x - 1)]} &= \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-16x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)[\sqrt{7x+2} + (4x - 1)]} &= -\frac{17}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 2\beta}{x^2 - 1} = -1$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 + \alpha x^3 - 2\beta}{x^2 - 1}$ με $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$,

έχουμε: $f(x)(x^2 - 1) = x^4 + \alpha x^3 - 2\beta$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 1)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + \alpha x^3 - 2\beta)$.

έτσι $-1 \cdot 0 = 1 + \alpha - 2\beta \Leftrightarrow \alpha = 2\beta - 1$. (1)

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 2\beta}{x^2 - 1} = -1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + (2\beta - 1)x^3 - 2\beta}{x^2 - 1} = -1 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2\beta x^3 - x^3 - 2\beta}{x^2 - 1} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(x-1) + 2\beta(x^3-1)}{x^2-1} = -1 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(x-1) + 2\beta(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-1} = -1 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x^3 + 2\beta(x^2+x+1)]}{(x-1)(x+1)} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2\beta(x^2+x+1)}{x+1} = -1$

Έτσι: $\frac{1+6\beta}{2} = -1 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ και από την (1) έχουμε $\alpha = -2$.

Άσκηση 4.

Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια της $h(x)$ στα $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ και στο $x_0 = e$

$$\text{με: } h(x) = \begin{cases} 3x^{2011} + x, & x \leq 1 \\ 3^x + 5x^2 - 4x, & 1 < x \leq 2 \\ -5x^2 + x - \ln x, & x > 2 \end{cases}$$

Λύση

Στο $x_0 = 1$ αλλάζει τύπο η συνάρτηση οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^{2011} + x) = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3^x + 5x^2 - 4x) = 4.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

Στο $x_0 = 2$ αλλάζει τύπο η συνάρτηση οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3^x + 5x^2 - 4x) = 21.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-5x^2 + x - \ln x) = -18 - \ln 2.$$

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Στο $x_0 = e$ δεν αλλάζει τύπο η συνάρτηση οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} (-5x^2 + x - \ln x) = -5e^2 + e - 1.$$

Άσκηση 5.

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x} \sqrt{\frac{5x}{x^2-9}}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{3x|x+\alpha| - 5\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2}}{|x+\alpha|}.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{7x-11}|}{|x-3|}.$$

Λύση

α) Πρέπει $x \neq 0$ και $x(x^2-9) > 0$, δηλαδή $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Μπορούμε όμως να απλοποιήσουμε αν κάνουμε όλες τις δυνατές πράξεις και παραγοντοποιήσεις, πράγματι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x} \sqrt{\frac{5x}{x^2-9}} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x} \sqrt{\frac{5x}{x^2-9}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{(x-3)^2 5x}{(x-3)(x+3)}} = \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{(x-3)5x}{(x+3)}} &= 0. \end{aligned}$$

β) Παρατηρούμε ότι το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Μπορούμε όμως να απλοποιήσουμε αν κάνουμε όλες τις δυνατές πράξεις και παραγοντοποιήσεις, πράγματι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{3x|x+\alpha| - 5\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2}}{|x+\alpha|} &= \\ \lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{3x|x+\alpha| - 5|x+\alpha|}{|x+\alpha|} &= \lim_{x \rightarrow -\alpha} (3x-5) = -3\alpha-5. \end{aligned}$$

γ) Παρατηρούμε ότι το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.

Μπορούμε όμως να απλοποιήσουμε αν κάνουμε όλες τις δυνατές πράξεις και παραγοντοποιήσεις, πράγματι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{7x-11}|}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{7x-11}}{x-3} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{7x-11})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{7x-11})}{(x-3)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{7x-11})} \right| =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{x^2-7x+12}{(x-3)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{7x-11})} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{7x-11})} \right| =$$

$$\left| \frac{-1}{2\sqrt{10}} \right| = \frac{\sqrt{10}}{20}$$

Άσκηση 6.

Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x^2-4}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2-9x+4+|-x^2+4x|}{|x-4|}.$$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, θα πρέπει να βγάλουμε το απόλυτο:

Επειδή $x \rightarrow -2^-$, θα έχουμε $|x+2| = -x-2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}.$$

β) Παρατηρούμε ότι το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$,

επειδή το $x_0 = 4$ μηδενίζει το $|x-4|$, θα πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

Για $x \rightarrow 4^-$ έχουμε $|x-4| = -x+4$ και $|-x^2+4x| = -x^2+4x$,

διότι $-x^2+4x = -x(x-4) > 0$ για $x \rightarrow 4^-$

$$\text{Έτσι: } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2-9x+4+|-x^2+4x|}{|x-4|} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2-9x+4-x^2+4x}{-x+4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2-5x+4}{-x+4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)(x-1)}{-x+4} = -3.$$

και για $x \rightarrow 4^+$ έχουμε $|x-4| = x-4$ και $|-x^2+4x| = x^2-4x$,

διότι $-x^2+4x = -x(x-4) < 0$ για $x \rightarrow 4^+$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2-9x+4+|-x^2+4x|}{|x-4|} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2-9x+4+x^2-4x}{x-4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x^2-13x+4}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(3x-1)}{x-4} = 11.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2-9x+4+|-x^2+4x|}{|x-4|} \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2-9x+4+|-x^2+4x|}{|x-4|}$$

άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4 + |-x^2 + 4x|}{|x - 4|}$.

Άσκηση 7.

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} - 3}{x^2 - 1}.$$

Λύση

Τα υπόριζα είναι διαφορετικά και $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5x-4} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x+1} = 2$.

Άρα θα “σπάσουμε” το -3 σε -1 και -2 , και θα χωρίσουμε το κλάσμα σε δύο.

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} - 3}{x^2 - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - 1 + \sqrt{3x+1} - 2}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{5x-4} - 1}{x^2 - 1} + \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 - 1} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(\sqrt{5x-4} - 1)(\sqrt{5x-4} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt{5x-4} + 1)} + \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x^2 - 1)(\sqrt{3x+1} + 2)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{5x - 5}{(x^2 - 1)(\sqrt{5x-4} + 1)} + \frac{3x - 3}{(x^2 - 1)(\sqrt{3x+1} + 2)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{5(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{5x-4} + 1)} + \frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} \right] = \frac{5}{4} + \frac{3}{8} = \frac{13}{8}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

$$\text{ώστε } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{\kappa x^2 - x + 3\sqrt{2}}{\alpha x + \alpha\sqrt{2}} = \sqrt{e}.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\kappa x^2 - x + 3\sqrt{2}}{\alpha x + \alpha\sqrt{2}} \text{ για } x \neq -\sqrt{2}, \text{ με } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} f(x) = \sqrt{e}.$$

$$\text{Οπότε } f(x)(\alpha x + \alpha\sqrt{2}) = \kappa x^2 - x + 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} [f(x)(\alpha x + \alpha\sqrt{2})] = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (\kappa x^2 - x + 3\sqrt{2})$$

$$\text{δηλαδή } 0 = 2\kappa + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \kappa = -2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{\kappa x^2 - x + 3\sqrt{2}}{\alpha x + \alpha\sqrt{2}} = \sqrt{e} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{-2\sqrt{2}x^2 - x + 3\sqrt{2}}{\alpha(x + \sqrt{2})} = \sqrt{e} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{(x + \sqrt{2})(-2\sqrt{2}x + 3)}{\alpha(x + \sqrt{2})} = \sqrt{e} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{-2\sqrt{2}x + 3}{\alpha} = \sqrt{e}$$

$$\text{Έτσι } \alpha\sqrt{e} = 7 \Leftrightarrow \alpha = \frac{7\sqrt{e}}{e}.$$

Άσκηση 2.

Αν $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{h^3(x) + 3} - 2h(x)}$.

Λύση

Έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, άρα πρέπει να βγάλουμε κοινό παράγοντα το $h(x) - 1$ αφού $\lim_{x \rightarrow -1} [h(x) - 1] = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{h^3(x) + 3} - 2h(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(h(x) - 1)(\sqrt{h^3(x) + 3} + 2h(x))}{(\sqrt{h^3(x) + 3} - 2h(x))(\sqrt{h^3(x) + 3} + 2h(x))} = \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(h(x) - 1)(\sqrt{h^3(x) + 3} + 2h(x))}{h^3(x) + 3 - 4h^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(h(x) - 1)(\sqrt{h^3(x) + 3} + 2h(x))}{h^3(x) - 4h^2(x) + 3} \end{aligned}$$

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $h^3(x) - 4h^2(x) + 3$ με σχήμα Horner.

1	-4	0	3	①
	1	-3	-3	
1	-3	-3	0	

Έτσι $h^3(x) - 4h^2(x) + 3 = (h(x) - 1)(h^2(x) - 3h(x) - 3)$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{h^3(x) + 3} - 2h(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(h(x) - 1)(\sqrt{h^3(x) + 3} + 2h(x))}{(h(x) - 1)(h^2(x) - 3h(x) - 3)} = \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{h^3(x) + 3} + 2h(x)}{h^2(x) - 3h(x) - 3} &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$, αν $\lim_{x \rightarrow e} \frac{2f(x) + \ln^2 x^2}{x \ln x - e^2 - e(\ln x - x)} = 3e$.

Λύση

Έστω

$$h(x) = \frac{2f(x) + \ln^2 x^2}{x \ln x - e^2 - e(\ln x - x)} = \frac{2f(x) + \ln^2 x^2}{x \ln x - e^2 - e \ln x + ex} = \frac{2f(x) + \ln^2 x^2}{(x - e)(\ln x + e)}$$

για $x > 0$ και $x \neq e$ και $x \neq \frac{1}{e}$ και με $\lim_{x \rightarrow e} h(x) = 3e$.

$$\text{Οπότε } h(x)(x - e)(\ln x + e) = 2f(x) + \ln^2 x^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{h(x)(x - e)(\ln x + e) - \ln^2 x^2}{2}.$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{h(x)(x - e)(\ln x + e) - \ln^2 x^2}{2} = -2.$$

Άσκηση 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^2 x^4 + \beta x + 2011\gamma}{-2x^3 - x^2 + 4x + 3}$, αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{6}{5}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^2 x^4 + \beta x + 2011\gamma}{-2x^3 - x^2 + 4x + 3}$ με $x \neq -1$ και $x \neq \frac{3}{2}$.

Οπότε $f(x)(-2x^3 - x^2 + 4x + 3) = \alpha^2 x^4 + \beta x + 2011\gamma$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)(-2x^3 - x^2 + 4x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -1} (\alpha^2 x^4 + \beta x + 2011\gamma)$

δηλαδή $0 = \alpha^2 - \beta + 2011\gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{\beta - \alpha^2}{2011}$ (1).

Άρα $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 x^4 + \beta x + 2011\gamma}{-2x^3 - x^2 + 4x + 3} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 x^4 + \beta x + \beta - \alpha^2}{-2x^3 - x^2 + 4x + 3} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 (x^4 - 1) + \beta (x + 1)}{(x + 1)^2 (-2x + 3)} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) [\alpha^2 (x - 1)(x^2 + 1) + \beta]}{(x + 1)^2 (-2x + 3)} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 (x^3 - x^2 + x - 1) + \beta}{(x + 1)(-2x + 3)} = \frac{6}{5}$ πάλι μηδενίζεται ο παρονομαστής έτσι:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{\alpha^2 (x^3 - x^2 + x - 1) + \beta}{(x + 1)(-2x + 3)}$ με $x \neq -1$ και $x \neq \frac{3}{2}$.

Οπότε $h(x)(x + 1)(-2x + 3) = \alpha^2 (x^3 - x^2 + x - 1) + \beta$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -1} [h(x)(x + 1)(-2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -1} [\alpha^2 (x^3 - x^2 + x - 1) + \beta]$

τότε $0 = -4\alpha^2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4\alpha^2$ (2).

Άρα $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 (x^3 - x^2 + x - 1) + \beta}{(x + 1)(-2x + 3)} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 (x^3 - x^2 + x - 1) + 4\alpha^2}{(x + 1)(-2x + 3)} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 (x^3 - x^2 + x + 3)}{(x + 1)(-2x + 3)} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2 (x + 1)(x^2 - 2x + 3)}{(x + 1)(-2x + 3)} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha^2(x^2 - 2x + 3)}{-2x + 3} = \frac{6}{5} \text{ άρα } \frac{6\alpha^2}{5} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -1.$$

Έτσι για $\alpha = 1$ ή $\alpha = -1$ από **(2)** έχουμε $\beta = 4$ και από **(1)** έχουμε $\gamma = \frac{3}{2011}$.

Άσκηση 5.

Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = 3f(x) - f(y) - 2x + 2y + 1 \quad (1).$$

α) Να βρείτε τα $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

α) Για $x = y = 0$, η (1) γίνεται: $f(0+0) = 3f(0) - f(0) + 1 \Leftrightarrow f(0) = -1$.

Για $x = 0$ και $y = 1$ η (1) γίνεται: $f(1) = 3f(0) - f(1) + 3 \Leftrightarrow f(1) = 0$.

Για $x = 1$ και $y = 1$ η (1) γίνεται: $f(2) = 3f(1) - f(1) + 1 \Leftrightarrow f(2) = 1$.

β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = -1$.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} [3f(1) - f(h) - 2 + 2h + 1] =$

$$3f(1) - \lim_{h \rightarrow 0} f(h) - 2 + 2 \lim_{h \rightarrow 0} h + 1 = 0.$$

Άσκηση 6.

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $5f^3(x) - 10xf^2(x) + 4x^2f(x) = 8x^3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το k και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 14x}{2011x^2 - 3x}$.

Λύση

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ έχουμε: } \frac{5f^3(x)}{x^3} - \frac{10xf^2(x)}{x^3} + \frac{4x^2f(x)}{x^3} = 8 \Leftrightarrow$$

$$5\left[\frac{f(x)}{x}\right]^3 - 10\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2 + 4\frac{f(x)}{x} = 8.$$

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[5\left[\frac{f(x)}{x}\right]^3 - 10\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2 + 4\frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 8$$

$$\text{και αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k, \text{ τότε:}$$

$$5k^3 - 10k^2 + 4k = 8 \Leftrightarrow 5k^2(k - 2) + 4(k - 2) = 0 \Leftrightarrow (5k^2 + 4)(k - 2) = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 14x}{2011x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(\frac{f(x)}{x} - 14\right)}{x(2011x - 3)} = \frac{2 - 14}{-3} = 4.$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -2\eta\mu x & , \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x + \beta + \gamma & , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ έτσι ώστε να} \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ και να είναι πραγματικοί αριθμοί .

Αν οι αριθμοί α, β, γ μεταβάλλονται, να βρεθεί ο αριθμός α και η καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(\beta, \gamma)$.

Λύση

- Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός, πρέπει να υπάρχουν τα

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x), \text{ να είναι πραγματικοί αριθμοί και να είναι μεταξύ τους ίσα,}$$

$$\text{δηλαδή πρέπει: } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} (-2\eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (\alpha\eta\mu x + \beta + \gamma) \Rightarrow 2 = -\alpha + \beta + \gamma. \quad (1)$$

- Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός, πρέπει να υπάρχουν τα

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x), \text{ να είναι πραγματικοί αριθμοί και να είναι μεταξύ τους ίσα,}$$

$$\text{δηλαδή πρέπει: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\alpha\eta\mu x + \beta + \gamma) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0. \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις (1), (2) βρίσκουμε: $2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1$.

Προσθέτοντας τις (1), (2) βρίσκουμε: $2\beta + 2\gamma = 2 \Rightarrow \beta + \gamma = 1$. Άρα τα σημεία $M(\beta, \gamma)$ ανήκουν στην ευθεία $x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$.

Άσκηση 2.

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1 \\ \frac{x^3+3}{4}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

β) Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1}$.

Λύση

α) Για να αντιστρέφεται η f θα πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι είναι 1-1.

Για $x < 1$ έχουμε: $f(x) = 2x - 1$, άρα είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα.

Για $x \geq 1$ έχουμε: $f(x) = \frac{x^3+3}{4}$.

$$\text{Αν } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1^3+3}{4} = \frac{x_2^3+3}{4} \Leftrightarrow$$

$$x_1^3 + 3 = x_2^3 + 3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα είναι 1-1.

Έστω $x_1 < 1$ και $x_2 \geq 1$ τότε,

$$x_1 < 1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2x_1 < 2 \stackrel{+(-1)}{\Leftrightarrow} 2x_1 - 1 < 1 \text{ δηλαδή } f(x_1) < 1,$$

$$x_2 \geq 1 \Leftrightarrow x_2^3 \geq 1 \Leftrightarrow x_2^3 + 3 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x_2^3+3}{4} \geq 1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq 1$$

άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Έτσι αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1-1.

Αφού η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται, σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Θα λύσουμε την αρχική συνάρτηση $f(x) = y$ ως προς x .

Για $x < 1$ έχουμε: $f(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2},$

επειδή $x < 1$ θα πρέπει $\frac{y+1}{2} < 1 \Leftrightarrow y < 1$ δηλαδή, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ με $x < 1$.

Για $x \geq 1$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^3+3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{x^3+3}{4} \Leftrightarrow 4y = x^3+3 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = 4y-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-3 \geq 1 \\ x = \sqrt[3]{4y-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x = \sqrt[3]{4y-3} \end{cases}$$

$$\text{Επομένως: } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x < 1 \\ \sqrt[3]{4x-3}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

β) Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1}$, στο $x_0 = 1$ αλλάζει τύπο η συνάρτηση οπότε θα πάρουμε

πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x+1}{2} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{4x-3} - 1}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\sqrt[3]{4x-3}\right)^3 - 1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{4x-3}\right)^2 + \sqrt[3]{4x-3} + 1\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x-1)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{4x-3}\right)^2 + \sqrt[3]{4x-3} + 1\right)} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1},$$

$$\text{συνεπώς δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1}.$$

Άσκηση 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta) + \alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x - 1} = 7$

Να βρείτε τον αριθμό $f(2)$.

Λύση

- Αφού η σχέση $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta) + \alpha\beta$, ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, θέτουμε $\alpha = \beta = 1$, έτσι έχουμε $f(2) = f^2(1) + 1$, **(1)**. Αρκεί να υπολογίσουμε το $f(1)$.

- Θέτουμε $\frac{f(x) - 1}{x} = g(x) \Rightarrow f(x) = xg(x) + 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. Οπότε
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 1) = 0 \cdot 1 + 1 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. **(2)**

- Θέτοντας $x - 1 = u \Rightarrow x = u + 1$ και όταν $x \rightarrow 1$ τότε $u \rightarrow 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x - 1} = 7 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^2 f(1+u) - f(1)}{u} = 7 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^2 [f(1)f(u) + 1 \cdot u] - f(1)}{u} = 7 \Rightarrow$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^2 f(1)f(u) + (1+u)^2 u - f(1)}{u} = 7 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+2u+u^2)f(1)f(u) + (1+u)^2 u - f(1)}{u} = 7 \Rightarrow$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{(f(u) + 2uf(u) + u^2 f(u) - 1)f(1)}{u} + (1+u)^2 \right] = 7 \Rightarrow$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[\left(uf(u) + 2f(u) + \frac{f(u) - 1}{u} \right) f(1) + (1+u)^2 \right] = 7 \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1)f(1) + 1 = 7 \Rightarrow 3f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = 2.$$

Άρα από την **(1)** βρίσκουμε: $f(2) = f^2(1) + 1 = 2^2 + 1 = 5$.

Άσκηση 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(-x)}{x} = 3$. Να βρείτε τα όρια:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x)}{x^2 + f^2(x)}$

Λύση

a) Θέτουμε $\frac{f(x) - 2f(-x)}{x} = g(x)$ (*) οπότε $f(x) - 2f(-x) = xg(x)$, με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$.

και αν $x = -t \Rightarrow t \rightarrow 0$ τότε $\lim_{t \rightarrow 0} g(-t) = 3$ ή $\lim_{x \rightarrow 0} g(-x) = 3$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2f(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x)) = 0 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2f(-x)) = 0, \quad (1)$$

Στην (*) αν $x = -t$, τότε $\frac{f(-t) - 2f(t)}{-t} = g(-t)$ ή $f(-x) - 2f(x) = -xg(-x)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(-x) - 2f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (-xg(-x)) = -0 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f(-x) - 2f(x)) = 0, \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2f(-x)) + 2 \lim_{x \rightarrow 0} (f(-x) - 2f(x)) = 0 + 2 \cdot 0 \text{ ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2f(-x) + 2f(-x) - 4f(x)) = 0 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 0} (-3f(x)) = 0 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

b) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(-x)}{x} = 3$ (3). Θέτουμε όπου $x = -t \Rightarrow t \rightarrow 0$ οπότε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(-t) - 2f(t)}{-t} \right) = 3 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(-x) - 2f(x)}{x} \right) = -3 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2f(-x) - 4f(x)}{x} \right) = -6 \quad (4).$$

Προσθέτοντας τις (3) και (4) έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(-x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2f(-x) - 4f(x)}{x} \right) = 3 + (-6) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3f(x)}{x} = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x)}{x^2 + f^2(x)} \stackrel{:x^2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(2x)}{x}}{1 + \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{f(2x)}{2x}}{1 + \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2} \stackrel{\text{αν } x \rightarrow 0 \text{ τότε } 2x \rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{f(2x)}{2x}}{1 + \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2} = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2} = 1.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 09/07/2018