

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΕΝΝΟΙΑ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ -
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ - ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
[Κεφ 1.4: Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και Ενότητες Όριο και Διάταξη -
Όρια και Πράξεις του κεφ.1.5 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x - 2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 - 3} - 1) = 0$ δηλαδή το όριο είναι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Θα προσπαθήσουμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή το $(x - 2)$.

Για τον αριθμητή $2x^2 - 3x - 2$ που είναι ένα τριώνυμο, βρίσκουμε τη διακρίνουσά του $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$, και τις δύο του ρίζες $x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4}$, δηλαδή $x_1 = 2$ και $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$$

Για να εμφανίσουμε τώρα στον παρονομαστή το $(x - 2)$ θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή και έτσι θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3} + 1}{\sqrt{x^2 - 3} + 1} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 1)(\sqrt{x^2 - 3} + 1)}{x^2 - 3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 1)(\sqrt{x^2 - 3} + 1)}{x^2 - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{x+2} =$$

$$\frac{(2 \cdot 2 + 1)(\sqrt{4-3}+1)}{2+2} = \frac{5 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2}.$$

Μεθοδολογία

Αν το όριο μιας ρητής συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$, τότε με κάποια από τις μεθόδους παραγοντοποίησης δημιουργούμε σε αριθμητή και παρονομαστή τον παράγοντα $(x - x_0)$ και τον απλοποιούμε.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2e^x \sqrt{x-5} + 27 \frac{|x+2006|}{x^2+2}$.

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

Λύση

Η συνάρτηση f για να ορίζεται πρέπει $x-5 \geq 0$, δηλαδή $x \geq 5$ έτσι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = [5, +\infty)$.

i) Το $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ δεν υπάρχει αφού η συνάρτηση f δεν ορίζεται

“κοντά στο $x_0 = -4$ ”.

ii) Το $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left[2e^x \sqrt{x-5} + 27 \frac{|x+2006|}{x^2+2} \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} (2e^x \sqrt{x-5}) + \lim_{x \rightarrow 5^+} \left[27 \frac{|x+2006|}{x^2+2} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} (2e^x) \cdot \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} + \lim_{x \rightarrow 5^+} 27 \frac{\lim_{x \rightarrow 5^+} |x+2006|}{\lim_{x \rightarrow 5^+} (x^2+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 5^+} (e^x) \cdot \sqrt{\lim_{x \rightarrow 5^+} (x-5)} + 27 \frac{\left| \lim_{x \rightarrow 5^+} (x+2006) \right|}{\lim_{x \rightarrow 5^+} x^2 + \lim_{x \rightarrow 5^+} 2} =$$

$$2e^5 \sqrt{5-5} + 27 \frac{|5+2006|}{5^2+2} = 2011.$$

Μεθοδολογία

- i) Όταν θέλουμε να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 , εξετάζουμε πρώτα αν έχει έννοια το όριο, δηλ. αν η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \text{ ή } (x_0, \beta) \text{ ή } (\alpha, x_0).$$

- ii) A) α) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ για κάθε σταθερά $c \in \mathbb{R}$

Β) Προσοχή: Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ για κάθε σταθερά } \kappa \in \mathbb{R}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} (\sqrt[\kappa]{f(x)}) = \sqrt[\kappa]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v \quad v \in \mathbb{N}^* \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v.$$

Παράδειγμα 3.

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x + \beta - 1}{x - \frac{1}{2}} = 15, \text{ να βρείτε τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Λύση

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } f(x) = \frac{2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x + \beta - 1}{x - \frac{1}{2}}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 15 \text{ και για } x \neq \frac{1}{2} \text{ έχουμε,}$$

$$f(x)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x + \beta - 1.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[f(x) \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x + \beta - 1)$$

Έτσι:

$$15 \cdot 0 = \frac{1}{2} + (5 + 2\alpha^2) \frac{1}{2} + \beta - 1 \Leftrightarrow 0 = 3 + \alpha^2 + \beta - 1 \Leftrightarrow \beta = -\alpha^2 - 2(1).$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 15 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x + \beta - 1}{x - \frac{1}{2}} = 15 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x - \alpha^2 - 2 - 1}{x - \frac{1}{2}} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x + 2\alpha^2 x - \alpha^2 - 3}{x - \frac{1}{2}} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3 + 2\alpha^2 x - \alpha^2}{x - \frac{1}{2}} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(x + 3) + \alpha^2(2x - 1)}{x - \frac{1}{2}} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(x + 3 + \alpha^2)}{x - \frac{1}{2}} = 15 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2(x + 3 + \alpha^2) = 15.$$

$$\text{Έτσι: } 2\left(\frac{1}{2} + 3 + \alpha^2\right) = 15 \Leftrightarrow 7 + 2\alpha^2 = 15 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4.$$

Από την (1) έχουμε $\beta = -6$. Άρα $\alpha = -2$ ή $\alpha = 2$ και $\beta = -6$.

Μεθοδολογία

Υπολογισμός παραμέτρων που περιέχονται στη ρητή συνάρτηση f .

Αν σε μια ρητή συνάρτηση που έχει κάποιες παραμέτρους, υπάρχει το όριο όταν το x τείνει στο x_0 και ο παρονομαστής μηδενίζεται στο x_0 , τότε θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση $f(x)$ κάνουμε χιαστί και μετά παίρνουμε τα όρια.

Παράδειγμα 4.

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - |x - 5|}{1 - |x^3 + 7|}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - |x - 5|) = \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{(3x - 1)^2} - |x - 5|) = \lim_{x \rightarrow -2} (|3x - 1| - |x - 5|) = 0 \text{ και}$$
$$\lim_{x \rightarrow -2} (1 - |x^3 + 7|) = 0.$$

Δηλαδή το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, θα πρέπει να βγάλουμε τα απόλυτα.

Όταν το $x \rightarrow -2$, τότε $\lim_{x \rightarrow -2} (3x - 1) = -7 < 0$ άρα $3x - 1 < 0$ κοντά στο $x_0 = -2$

οπότε θα έχουμε: $|3x - 1| = -(3x - 1)$, και $\lim_{x \rightarrow -2} (x - 5) = -7 < 0$ άρα $x - 5 < 0$ κοντά στο $x_0 = -2$

οπότε θα έχουμε: $|x - 5| = -(x - 5)$, ακόμα $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 7) = -1 < 0$ άρα $x^3 + 7 < 0$ κοντά στο $x_0 = -2$

οπότε θα έχουμε: $|x^3 + 7| = -(x^3 + 7)$.

$$\text{Έτσι: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|3x - 1| - |x - 5|}{1 - |x^3 + 7|} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(3x - 1) + (x - 5)}{1 + x^3 + 7} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3x + 1 + x - 5}{x^3 + 8} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2(x + 2)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2}{x^2 - 2x + 4} = -\frac{1}{6}$$

Μεθοδολογία

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και ο τύπος της $f(x)$ περιέχει απόλυτα, θα πρέπει να τα απαλείψουμε.

Αν το x_0 δεν μηδενίζει τις συναρτήσεις που είναι μέσα στα απόλυτα, τότε τα βγάζουμε έχοντας υπόψιν ότι:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε: $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , οπότε βγάζουμε το απόλυτο

χωρίς να αλλάξουμε τα πρόσημα της συνάρτησης μέσα στο απόλυτο.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε: $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , οπότε βγάζουμε το απόλυτο

αλλάζοντας τα πρόσημα της συνάρτησης μέσα στο απόλυτο.

Παράδειγμα 5.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x - 1}.$$

Λύση (2 τρόποι επίλυσης)

α) Α' Τρόπος:

Θέτουμε $\omega = \sqrt[6]{x}$ οπότε $\omega^2 = \sqrt[3]{x}$ και $\omega^3 = \sqrt{x}$

επίσης για $x \rightarrow 2$ τότε $\omega \rightarrow \sqrt[6]{2}$.

$$\text{Έτσι έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}} = \lim_{\omega \rightarrow \sqrt[6]{2}} \frac{\omega^3 - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} - \omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \sqrt[6]{2}} \frac{\omega^3 - (\sqrt[6]{2})^3}{(\sqrt[6]{2})^2 - \omega^2} =$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \sqrt[6]{2}} \frac{(\omega - \sqrt[6]{2})(\omega^2 + \sqrt[6]{2}\omega + \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[6]{2} - \omega)(\sqrt[6]{2} + \omega)} = \lim_{\omega \rightarrow \sqrt[6]{2}} \frac{-(\omega^2 + \sqrt[6]{2}\omega + \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[6]{2} + \omega)} = -\frac{3}{2}\sqrt[6]{2}.$$

Β' Τρόπος:

$$2 - x = (\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{x})^3 = (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}) \left[(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 \right].$$

$$\text{Οπότε } \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x} = \frac{2 - x}{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} \text{ έτσι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{\frac{(2 - x)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x}^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x}^2)}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x}^2}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} =$$

$$-\frac{3\sqrt[3]{2}^2}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}\sqrt[6]{2}.$$

β) Τα υπόριζα είναι διαφορετικά αλλά $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$. Αφού τα δύο όρια είναι ίσα με 1 τότε θα προσθαφαιρέσουμε το 1 και θα χωρίσουμε το κλάσμα σε δύο.

$$\text{Έτσι έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} - 1 + 1}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1 - (\sqrt{x} - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x-1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(\sqrt[3]{x^2} - 1) \left((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1 \right)}{(x-1) \left((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1 \right)} - \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 - 1}{(x-1) \left((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1 \right)} - \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1) \left((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1 \right)} - \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+1}{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1} - \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} \right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Μεθοδολογία

α) Περίπτωση απροσδιοριστίας, όπου έχουμε ρίζες διαφορετικής τάξης.
 Αν τα υπόριζα είναι ίδια μπορούμε να θέσουμε ως u την ρίζα,
 που θα έχει τάξη το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των ριζών.
 Αφού υπολογίσουμε το u_0 που θα τείνει το u όταν το $x \rightarrow x_0$.
 Αλλιώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες άθροισμα κύβων
 ή διαφορά κύβων.

β) Περίπτωση απροσδιοριστίας όπου έχουμε ρίζες διαφορετικής ή ίδιας τάξης.
 Αν τα υπόριζα είναι διαφορετικά και τα δυο ριζικά έχουν
 το ίδιο όριο του $x \rightarrow x_0$, τότε προσθέτουμε και αφαιρούμε αυτό το κοινό όριο
 στον αριθμητή του κλάσματος και χωρίζουμε το κλάσμα σε δυο.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta + 2}{x^2 - 1}$.

Αν το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

Λύση

Επειδή $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta + 2}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 + 2\alpha x + \beta + 2 = f(x) \cdot (x^2 - 1)$, με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2\alpha x + \beta + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot (x^2 - 1)] \Rightarrow 1 + 2\alpha + \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\beta = -2\alpha - 3} \quad (1)$$

$$\text{Τώρα επειδή } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta + 2}{x^2 - 1} = 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2\alpha x - 2\alpha - 3 + 2}{x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2\alpha x - 2\alpha - 1}{x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1) + 2\alpha(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[(x+1) + 2\alpha]}{(x-1)(x+1)} = 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+2\alpha}{x+1} = 2 \Rightarrow \frac{2+2\alpha}{2} = 2 \Leftrightarrow 2+2\alpha = 4 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

Και από την (1) τώρα θα έχουμε: $\beta = -2 \cdot 1 - 3 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -5}$.

Μεθοδολογία

Αν η f είναι ρητή συνάρτηση η οποία έχει κάποιες παραμέτρους και ζητάμε να τις βρούμε έτσι ώστε να έχει η f όριο όταν το x τείνει στο x_0 , από τον τύπο της f κάνουμε χιαστί και μετά παίρνουμε όρια.

Παράδειγμα 2.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^2 - \beta x + 2, & x \leq -1 \\ -3\alpha x + 2\beta + 6, & x > -1 \end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, έτσι ώστε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$.

Λύση

Επειδή το $x_0 = -1$ στο οποίο έχουμε το όριο είναι το σημείο στο οποίο αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης, θα πάρουμε πλευρικά όρια.

Για να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$ θα πρέπει $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$ (1).

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-3\alpha x + 2\beta + 6) = 3\alpha + 2\beta + 6$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2\alpha x^2 - \beta x + 2) = 2\alpha + \beta + 2$$

Οπότε από την (1) θα έχουμε:

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + 6 = 3 \\ \text{και} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = -3 & (2) \\ \text{και} \\ 2\alpha + \beta + 2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Από την (3) προκύπτει: $\beta = -2\alpha + 1$ (4).

Οπότε η (2) γίνεται: $3\alpha + 2(-2\alpha + 1) = -3 \Leftrightarrow 3\alpha - 4\alpha + 2 = -3 \Leftrightarrow -\alpha = -5 \Leftrightarrow$
 $\boxed{\alpha = 5}$.

Και από την (4) θα έχω: $\beta = -2 \cdot 5 + 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -9}$.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να βρούμε το όριο σε ένα σημείο x_0 μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, και το x_0 είναι το σημείο στο οποίο αλλάζει ο τύπος, παίρνουμε πλευρικά όρια.

Παράδειγμα 3.

Να υπολογίσετε, αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3| - 4|x-1| + 3}{|x-2|}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι τα:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (|x-3| - 4|x-1| + 3) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = 0$$

Δηλαδή το όριο έχει τη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$, άρα θα πρέπει να βγάλουμε τα απόλυτα.

Επειδή το $x_0 = 2$ μηδενίζει το $|x-2|$, θα πάρουμε πλευρικά όρια.

- Όταν το $x \rightarrow 2^+$, θα ισχύει: $x > 2$, οπότε θα έχουμε:

$$x-3 < 0, x-1 > 0, x-2 > 0$$

$$\text{Άρα: } |x-3| = -x+3, |x-1| = x-1 \text{ και } |x-2| = x-2$$

Οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+3-4(x-1)+3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+3-4x+4+3}{x-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-5x+10}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-5(x-2)}{x-2} = \boxed{-5}$$

- Όταν το $x \rightarrow 2^-$ τώρα θα ισχύει $x < 2$, οπότε θα έχουμε:

$$x-3 < 0, x-1 > 0, x-2 < 0$$

$$\text{Άρα: } |x-3| = -x+3, |x-1| = x-1 \text{ και } |x-2| = -x+2$$

Οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+3-4(x-1)+3}{-x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+3-4x+4+3}{-(x-2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-5x+10}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-5(x-2)}{-(x-2)} = \boxed{5}$$

Δηλαδή τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, άρα το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3|-4|x-1|+3}{|x-2|}$ δεν υπάρχει.

Μεθοδολογία

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ καταλήγει στη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και ο τύπος της $f(x)$ περιέχει απόλυτα θα πρέπει να τα απαλείψουμε.

- Αν το x_0 δεν μηδενίζει τις συναρτήσεις που είναι μέσα στα απόλυτα, τότε τα βγάζουμε σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων.

Δηλαδή:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , δηλαδή βγάζουμε το απόλυτο χωρίς να αλλάξουμε τα πρόσημα της συνάρτησης μέσα στο απόλυτο,

ενώ

αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , δηλαδή βγάζουμε το απόλυτο αλλάζοντας τα πρόσημα της συνάρτησης μέσα στο απόλυτο.

- Αν το x_0 τώρα μηδενίζει τη συνάρτηση που είναι μέσα σε κάποιο απόλυτο, τότε παίρνουμε πλευρικά όρια χρησιμοποιώντας τις παραπάνω δύο ιδιότητες των ορίων.

Παράδειγμα 4.

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x - 1}$

Λύση

Επειδή το $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2) = 0$ και το $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ το όριό μας είναι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$,

οπότε θα εμφανίσουμε στον αριθμητή τον παράγοντα $(x - 1)$.

Παρατηρούμε ότι οι δύο ρίζες είναι διαφορετικής τάξης, οπότε θέτουμε ως u τη ρίζα που έχει βαθμό το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των βαθμών των ριζών, δηλαδή $u = \sqrt[6]{x}$ (1), οπότε όταν το $x \rightarrow 1$, το $u \rightarrow \sqrt[6]{1} = 1$.

Από την (1) επίσης προκύπτει ότι: $x = u^6$, $\sqrt[3]{x} = u^2$ και $\sqrt{x} = u^3$.

Οπότε, το όριο γίνεται:

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 + u^3 - 2}{u^6 - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 + u^2 - 2}{u^6 - 1} \quad (2)$$

Παραγοντοποιούμε αριθμητή με σχήμα Horner:

1	1	0	-2	①
	1	2	2	
1	2	2	0	

οπότε ο αριθμητής γίνεται: $(u - 1)(u^2 + 2u + 2)$.

Ομοίως για τον παρονομαστή, θα έχουμε:

1	0	0	0	0	0	-1	①
	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	0	

και έτσι ο παρονομαστής θα γίνει: $(u - 1)(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)$.

Τότε το όριο (2) γίνεται:

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u^2+2u+2)}{(u-1)(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2+2u+2}{u^5+u^4+u^3+u^2+u+1} = \frac{5}{6}$$

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε ρίζες διαφορετικής τάξης, μπορούμε να θέσουμε ως u τη ρίζα που θα έχει τάξη το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των ριζών, και αφού υπολογίσουμε το u_0 που θα τείνει το u όταν το $x \rightarrow x_0$, θα οδηγηθούμε σε ένα όριο πηλίκου πολυωνυμικών συναρτήσεων, τις οποίες και θα παραγοντοποιήσουμε.

Παράδειγμα 5.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{1 - \sqrt{x}}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{3x^2 - 4}}{x - \sqrt{2}}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{5}{-3x^2 + 13x - 12} \right)$$

Λύση

i) Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

Επειδή το $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου.

Παρατηρούμε όμως ότι για $x = 2$ μηδενίζονται και οι δυο όροι του κλάσματος, έτσι φτάνουμε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$ που πρέπει να άρουμε.

Αυτό επιτυγχάνεται παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή, οπότε εμφανίζεται ο παράγοντας $x - 2$ που στη συνέχεια απλοποιούμε.

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Οπότε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, για $x \neq 2$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$.

ii) Για $x = 1$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος, έτσι φτάνουμε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$ που πρέπει να άρουμε.

Αυτό επιτυγχάνεται παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή, οπότε εμφανίζεται ο παράγοντας $x - 1$ που στη συνέχεια απλοποιούμε.

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή $x^3 - 3x^2 - x + 3$ με σχήμα Horner.

1	-3	-1	3	①
	1	-2	-3	
1	-2	-3	0	

Οπότε ο αριθμητής γίνεται: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$.

Για τον παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή και έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 3)(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 3)(1 + \sqrt{x})}{1^2 - (\sqrt{x})^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 3)(1 + \sqrt{x})}{1 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[-(x^2 - 2x - 3)(1 + \sqrt{x}) \right] = 8.$$

iii) Για $x = \sqrt{2}$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος.

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με την συζυγή παράσταση του αριθμητή και έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{3x^2 - 4}}{x - \sqrt{2}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{3x^2 - 4})(x + \sqrt{3x^2 - 4})}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3x^2 - 4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(x)^2 - (\sqrt{3x^2 - 4})^2}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3x^2 - 4})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - (3x^2 - 4)}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3x^2 - 4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{-2x^2 + 4}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3x^2 - 4})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{-2(x^2 - \sqrt{2}^2)}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3x^2 - 4})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{-2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3x^2 - 4})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{-2(x + \sqrt{2})}{(x + \sqrt{3x^2 - 4})} = -2.$$

iv) Για $x=1$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος.

Έχουμε κυβική ρίζα, μπορούμε να κάνουμε χρήση της ταυτότητας:

$$\alpha - \beta = (\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha}^2 + \sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\beta}^2) \text{ ή}$$

$$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt[3]{\alpha}^2 + \sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\beta}^2}.$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt[3]{x} - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1)}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1}^2)}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1}^2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{1})^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3(x+1)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1)] = 18.$$

v) Έστω η συνάρτηση: $h(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{-3x^2+13x-12}$, με $D_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}, 3\right\}$.

Για $x=3$ μηδενίζονται οι παρανομαστές των ρητών παραστάσεων της h , και επειδή δεν υπάρχει το όριο των επιμέρους ρητών παραστάσεων, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των ορίων οπότε θα κάνουμε τις πράξεις και μετά θα υπολογίσουμε το όριο.

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{5}{-3x^2+13x-12} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)(-3x+4)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+9}{(x-3)(-3x+4)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(-3x+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-3x+4} = \frac{3}{5}.$$

Μεθοδολογία

ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{0}{0}$.

- i) Αν το όριο μιας ρητής συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, τότε με κάποια από τις μεθόδους παραγοντοποίησης δημιουργούμε σε αριθμητή και παρονομαστή τον παράγοντα $x - x_0$ και τον απλοποιούμε.

Αρχικά λοιπόν, όταν πάμε να βρούμε το όριο μιας ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{P(x)}{K(x)}$, πάντα αντικαθιστούμε το x με το x_0 και αν καταλήξουμε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$,

όπου $P(x_0) = 0$ και $K(x_0) = 0$ τότε ο $x - x_0$ θα είναι παράγοντας τους και θα ισχύει:
 $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ και $K(x) = (x - x_0)H(x)$.

Επομένως, $f(x) = \frac{P(x)}{K(x)} = \frac{(x - x_0)Q(x)}{(x - x_0)H(x)} = \frac{Q(x)}{H(x)}$ άρα,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{K(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)Q(x)}{(x - x_0)H(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{H(x)}.$$

Σημείωση η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί

ii) έως iv)

Όταν έχουμε τετραγωνικές ρίζες πολλαπλασιάζουμε αριθμητή ή παρονομαστή ή και τους δύο όρους του κλάσματος με τις συζυγείς παραστάσεις των άρρητων όρων,

ούτως ώστε να δημιουργηθεί η ταυτότητα $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Ομοίως όταν έχουμε κυβικές ρίζες μπορούμε να κάνουμε χρήση των ταυτοτήτων:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \text{ ή}$$

$$\alpha + \beta = (\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha}^2 - \sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\beta}^2) \text{ ή}$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \text{ ή}$$

$$\alpha - \beta = (\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha}^2 + \sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\beta}^2).$$

- v) Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ και δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των ορίων οπότε θα κάνουμε τις πράξεις και μετά θα υπολογίσουμε το όριο.

Παράδειγμα 6.

Έχουμε την συνάρτηση $g(x) = 4x^2 + (2 - \alpha)x + \beta$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 18$, και $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 11x + g(x)}{-x^2 + 5x + 14} = 1$.

Λύση

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 18$, οπότε $16 - 4 + 2\alpha + \beta = 18 \Leftrightarrow \beta = -2\alpha + 6$. (1)

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 11x + g(x)}{-x^2 + 5x + 14} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 11x + 4x^2 + (2 - \alpha)x + \beta}{-x^2 + 5x + 14} = 1 \Leftrightarrow^{(1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 11x + 2x - \alpha x - 2\alpha + 6}{-x^2 + 5x + 14} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6 - \alpha x - 2\alpha}{-x^2 + 5x + 14} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x+3) - \alpha(x+2)}{(x+2)(-x+7)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)[(5x+3) - \alpha]}{(x+2)(-x+7)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+3-\alpha}{-x+7} = 1$$

$$\text{δηλαδή: } \frac{-10+3-\alpha}{2+7} = 1 \Leftrightarrow -7-\alpha = 9 \Leftrightarrow \alpha = -16,$$

οπότε από την (1) έχουμε $\beta = 38$.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται η συνάρτηση g συναρτήσει παραμέτρων, τις οποίες θέλουμε να υπολογίσουμε και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x) + g(x)}{h(x)} = \lambda \in \mathbb{R}, \quad h(x_0) = 0 \quad \text{και}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, τότε υπολογίζοντας τα όρια καταλήγουμε σε σύστημα από το οποίο βρίσκουμε τις παραμέτρους.

Παράδειγμα 7.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και να είναι πραγματικός

$$\text{αριθμός με: } f(x) = \begin{cases} 5x^2 + \alpha^2 x + \beta^2, & x < 1 \\ 2\alpha x^5 - 4\beta x + 2011 \cdot \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι στο $x_0 = 1$ αλλάζει τύπο η συνάρτηση οπότε θα πάρουμε πλευρικά όρια δηλαδή:

Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, θα πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Για $x < 1$ είναι:

$$f(x) = 5x^2 + \alpha^2 x + \beta^2, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5 + \alpha^2 + \beta^2.$$

Για $x > 1$ είναι:

$$f(x) = 2\alpha x^5 - 4\beta x + 2011 \cdot \ln x, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2\alpha - 4\beta.$$

$$\text{Επομένως, } 5 + \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha - 4\beta \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 + 4\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = -2.$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συνάρτηση πολλαπλού τύπου της οποίας υπάρχουν τα όρια στα σημεία στα οποία αλλάζει τύπο, αυτό σημαίνει ότι τα πλευρικά όρια στα σημεία αυτά είναι ίσα.

Παράδειγμα 8.

Να υπολογίσετε αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + 2x^2 - |3x-5|}{x^2 - 1}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} (|x-1| + 2x^2 - |3x-5|) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$.

Δηλαδή το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, θα πρέπει να βγάλουμε τα απόλυτα.

Επειδή το $x_0 = 1$ μηδενίζει το $|x-1|$, θα πάρουμε πλευρικά όρια.

Όταν το $x \rightarrow 1^-$, ισχύει $x < 1$ οπότε θα έχουμε: $x-1 < 0$ και $3x-5 < 0$.

Αρα $|x-1| = x-1$ και $|3x-5| = -3x+5$.

$$\text{Έτσι: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1+2x^2+3x-5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2+2x-4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = 3$$

Όταν το $x \rightarrow 1^+$, ισχύει $x > 1$ οπότε θα έχουμε: $x-1 > 0$ και $3x-5 < 0$.

Αρα $|x-1| = x-1$ και $|3x-5| = -3x+5$.

$$\text{Έτσι: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1+2x^2+3x-5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2+4x-6}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = 4.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1| + 2x^2 - |3x-5|}{x^2 - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1| + 2x^2 - |3x-5|}{x^2 - 1}$$

άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + 2x^2 - |3x-5|}{x^2 - 1}$.

Μεθοδολογία

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και ο τύπος της $f(x)$ περιέχει απόλυτα, θα πρέπει να τα απαλείψουμε.

Αν το x_0 μηδενίζει την παράσταση που είναι μέσα σε κάποιο απόλυτο, τότε παίρνουμε πλευρικά όρια.

Παράδειγμα 9.

α) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow 2} [-2f(x) + 3g(x)] = 2$ και

$\lim_{x \rightarrow 2} [5f(x) - 7g(x)] = -4$, να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

β) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x^3 - 8)] = 4$,

να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)]$.

γ) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$ και $4f^3(x) + xf^2(x) - 2x^2f(x) = 3x^3$.

Να βρείτε το α και το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

α) Θέτουμε $h(x) = -2f(x) + 3g(x)$ με $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 2$

και $k(x) = 5f(x) - 7g(x)$ με $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = -4$.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} -2f(x) + 3g(x) = h(x) & \cdot 5 \\ 5f(x) - 7g(x) = k(x) & \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10f(x) + 15g(x) = 5h(x) \\ 10f(x) - 14g(x) = 2k(x) \end{cases}$$

Άρα $g(x) = 5h(x) + 2k(x)$,

οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [5h(x) + 2k(x)] = 5 \lim_{x \rightarrow 2} h(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 2$.

Ακόμα $f(x) = \frac{-h(x) + 3g(x)}{2}$, έτσι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-h(x) + 3g(x)}{2} = 2$.

β) Α' Τρόπος:

Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = h(x)(x-2)$ για $x \neq 2$, με $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$

και $k(x) = g(x)(x^3 - 8) \Leftrightarrow g(x) = \frac{k(x)}{x^3 - 8}$ για $x \neq 2$, με $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 4$.

Έτσι για $x \neq 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \frac{k(x)}{x^3 - 8} h(x)(x-2) = \\ &= \frac{k(x)h(x)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{k(x)h(x)}{x^2 + 2x + 4}. \end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x)h(x)}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3 \cdot 4}{12} = 1$.

Β' Τρόπος:

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με κατάλληλους όρους

ώστε να δημιουργήσουμε τις δοσμένες σχέσεις δηλαδή,

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x)(x-2)}{x-2} \cdot \frac{g(x)(x^3-8)}{x^3-8} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x)}{x-2} \cdot (g(x)(x^3-8)) \cdot \frac{x-2}{x^3-8} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x)}{x-2} \cdot (g(x)(x^3-8)) \cdot \frac{1}{x^2+2x+4} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x^3-8)] \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+2x+4} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = 1.$$

γ) Για $x \neq 0$ έχουμε: $4f^3(x) + xf^2(x) - 2x^2f(x) = 3x^3 \Leftrightarrow$

$$\frac{4f^3(x)}{x^3} + \frac{xf^2(x)}{x^3} - \frac{2x^2f(x)}{x^3} = \frac{3x^3}{x^3} \Leftrightarrow$$

$$4 \left[\frac{f(x)}{x} \right]^3 + \left[\frac{f(x)}{x} \right]^2 - 2 \frac{f(x)}{x} = 3.$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow 0} \left[4 \left[\frac{f(x)}{x} \right]^3 + \left[\frac{f(x)}{x} \right]^2 - 2 \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 3$$

και αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$, τότε: $4\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha = 3 \Leftrightarrow 4\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$

Με σχήμα Horner.

4	1	-2	-3	①
	4	5	3	
4	5	3	0	

$$4\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(4\alpha^2 + 5\alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

αφού $4\alpha^2 + 5\alpha + 3 \neq 0$. Έτσι έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 \cdot 0 = 0.$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Μεθοδολογία

α),β) Αν δίνονται τα όρια των συναρτήσεων $h(x)$, $k(x)$ του $x \rightarrow x_0$ οι οποίες είναι γραμμένες ως συνδυασμός των f, g και ζητάμε τα όρια των f, g του $x \rightarrow x_0$, τότε ΔΕΝ μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων για την εύρεση τους, αφού δεν ξέρουμε ακόμα αν υπάρχουν.

Γι' αυτό λύνουμε το σύστημα των $h(x)$, $k(x)$ ως προς $f(x)$, $g(x)$ και έπειτα βρίσκουμε τα όρια. Ή πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με κατάλληλους όρους ώστε να δημιουργήσουμε τις δοσμένες σχέσεις.

γ) Όταν δίνεται το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x}$ και μια ισότητα στην οποία περιέχονται δυνάμεις

της $f(x)$, για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ διαιρούμε τη δοσμένη συνθήκη

με κατάλληλη δύναμη του x , ούτως ώστε να δημιουργηθούν δυνάμεις

του $\frac{f(x)}{x}$ που γνωρίζουμε το όριο τους.

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1. (εκτός εξεταστέας ύλης)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{z+\bar{z}}{2}x^2 + (z-\bar{z})i \cdot x - \gamma^3}{x-2}, & x < 2, \text{ όπου } z = \alpha + \beta i. \\ \operatorname{Im}(z)x^2 - 5\operatorname{Re}(z)x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, όταν το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } z = \alpha + \beta i \text{ οπότε } \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{\alpha + \beta i + (\alpha - \beta i)}{2} = \alpha$$

$$\text{και } z - \bar{z} = \alpha + \beta i - (\alpha - \beta i) = 2\beta i.$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma^3}{x-2}, & x < 2 \\ \beta x^2 - 5\alpha x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Αφού υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad (1)$$

$$\text{Για } x < 2 \text{ είναι } f(x) = \frac{\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma^3}{x-2},$$

$$\text{οπότε } f(x)(x-2) = \alpha x^2 - 2\beta x - \gamma^3.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)(x-2)] = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma^3), \text{ οπότε } 0 = 4\alpha - 4\beta - \gamma^3 \Leftrightarrow \gamma^3 = 4\alpha - 4\beta \quad (2)$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma^3}{x-2} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha x^2 - 2\beta x - 4\alpha + 4\beta}{x-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\alpha(x^2 - 4) - 2\beta(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)[\alpha(x+2) - 2\beta]}{x-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha x + 2\alpha - 2\beta) = 4\alpha - 2\beta.$$

$$\text{Για } x > 2 \text{ είναι } f(x) = \beta x^2 - 5\alpha x + 4, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4\beta - 10\alpha + 4.$$

$$\text{Επομένως } (1) \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta = 4\beta - 10\alpha + 4 \Leftrightarrow 14\alpha - 6\beta = 4 \Leftrightarrow 7\alpha - 3\beta = 2 \quad (3)$$

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(3,10)$ τότε ισχύει:

$$f(3)=10 \Leftrightarrow 9\beta - 15\alpha + 4 = 10 \Leftrightarrow -15\alpha + 9\beta = 6 \Leftrightarrow -5\alpha + 3\beta = 2 \quad (4)$$

Από (3) και (4) παίρνουμε $\alpha = 2$ και $\beta = 4$ και από (2) $\gamma^3 = -8 \Leftrightarrow \gamma = -2$.

Μεθοδολογία

Όταν υπάρχει, το όριο στο x_0 μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, και το x_0 είναι το σημείο στο οποίο αλλάζει ο τύπος, παίρνουμε πλευρικά όρια τα οποία είναι ίσα.

Ημερομηνία τροποποίησης: 01/09/2015