

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ - ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

[Ενότητες Κριτήριο Παρεμβολής - Τριγωνομετρικά Όρια - Όριο Σύνθετης Συνάρτησης του
κεφ.1.5 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu 3x}$.

Λύση

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu 3x = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου. Παρατηρούμε όμως ότι για $x = 0$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, άρα έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Οπότε για τα $x \neq 0$ τα οποία βρίσκονται “αρκούντως κοντά στο 0”, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με x και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 3x} = \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{\eta\mu 3x}{x}} \quad (1)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$, θέτουμε $\omega = 3x$. Όταν το $x \rightarrow 0$ και το $\omega \rightarrow 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \omega}{\frac{\omega}{3}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\eta\mu \omega}{\omega} \right) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{\eta\mu 3x}{x}} = \frac{1}{3},$$

και λόγω της σχέσης (1) παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu 3x} = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 2.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$7x - x^3 < f(x) < x^4 + 5 \text{ κοντά στο } 1.$$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x^2 - 1)$.

Λύση

α. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} (7x - x^3) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 5) = 6,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6.$$

β. Θέτουμε $\omega = 2x^2 - 1$. Όταν το $x \rightarrow 1$ και το $\omega \rightarrow 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(2x^2 - 1) = \lim_{\omega \rightarrow 1} f(\omega) = 6.$$

Άσκηση 3.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A) = (-5, 2)$. Να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\eta_{\mu x} \cdot f(x)] = 0.$$

Λύση

Αφού η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $(-5, 2)$ θα ισχύει $-5 < f(x) < 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $\eta_{\mu x} > 0$, οπότε έχουμε :

$$-5 < f(x) < 2 \Leftrightarrow$$

$$-5\eta_{\mu x} < \eta_{\mu x} \cdot f(x) < 2\eta_{\mu x}.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (-5\eta_{\mu x}) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} 2\eta_{\mu x} = 0,$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\eta_{\mu x} \cdot f(x)] = 0 \quad (1).$$

Για $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $\eta_{\mu x} < 0$, οπότε έχουμε:

$$-5 < f(x) < 2 \Leftrightarrow$$

$$-5\eta_{\mu x} > \eta_{\mu x} \cdot f(x) > 2\eta_{\mu x}.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} (-5\eta_{\mu x}) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} 2\eta_{\mu x} = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\eta_{\mu x} \cdot f(x)] = 0 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\eta_{\mu x} \cdot f(x)] = 0.$$

Άσκηση 4.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$|f(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

β. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(3x - 2).$

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$

Λύση

α. Η δοθείσα σχέση (1) γίνεται:

$$-x^4 \leq f(x) - \eta\mu^2 x \leq x^4 \Leftrightarrow$$

$$-x^4 + \eta\mu^2 x \leq f(x) \leq x^4 + \eta\mu^2 x \quad (2)$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^4 + \eta\mu^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + \eta\mu^2 x) = 0,$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

β. Θέτουμε $\omega = 3x - 2$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(3x - 2) = \lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = 0.$$

γ. Διαιρούμε τη σχέση (2) με x^2 . Έτσι για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{-x^4 + \eta\mu^2 x}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{x^4 + \eta\mu^2 x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$-x^2 + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq x^2 + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-x^2 + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right) = 0 + 1 = 1,$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$$

Άσκηση 5.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$-2 \leq f(x) \leq 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)f(x)]$.

Λύση

Για $x > -1$ έχουμε:

$$-2 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -2(x+1) \leq (x+1)f(x) \leq 3(x+1)$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} [-2(x+1)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} 3(x+1) = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} [(x+1)f(x)] = 0 \quad (1).$$

Για $x < -1$ έχουμε :

$$-2 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -2(x+1) \geq (x+1)f(x) \geq 3(x+1).$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} [-2(x+1)] = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3(x+1) = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} [(x+1)f(x)] = 0 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)f(x)] = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \epsilon\phi x}{x^2}$.

Λύση

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου. Παρατηρούμε όμως ότι για $x = 0$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, άρα έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Οπότε για τα $x \neq 0$ τα οποία βρίσκονται “αρκούντως κοντά στο 0”, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu x - \epsilon\phi x}{x^2} &= \frac{\eta\mu x - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2} = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2 \sigma\upsilon\nu x} = \\ \frac{\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{x^2 \sigma\upsilon\nu x} &= \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \quad (1) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \epsilon\phi x}{x^2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right] = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Άσκηση 2.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)-1}{\sqrt{x}-1}$.

Λύση

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}-1) = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου.

Παρατηρούμε όμως ότι για $x=1$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, άρα έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Οπότε για τα $x \neq 1$ τα οποία βρίσκονται “αρκούντως κοντά στο 1”, έχουμε:

$$\frac{\sin(x-1)-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sin(x-1)-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sin(x-1)-1}{x-1} \cdot (\sqrt{x}+1) \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)-1}{x-1}$, θέτουμε $\omega = x-1$. Όταν το $x \rightarrow 1$ το $\omega \rightarrow 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)-1}{x-1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega - 1}{\omega} = 0.$$

Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)-1}{x-1} \cdot (\sqrt{x}+1) \right) = 0 \cdot 2 = 0,$$

και λόγω της σχέσης (1) προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)-1}{\sqrt{x}-1} = 0.$$

Άσκηση 3.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$1 - x\eta\mu x < f(x) < \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}$.

β. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Λύση

α. Τροποποιούμε τη σχέση (1), ώστε να δημιουργήσουμε μια νέα ανισοτική σχέση για τη συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το όριο:

$$1 - x\eta\mu x < f(x) < \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$-x\eta\mu x < f(x) - 1 < \sigma\upsilon\nu x - 1.$$

Επειδή είναι $x > 0$ έχουμε:

$$-\frac{x \cdot \eta\mu x}{x} < \frac{f(x) - 1}{x} < \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \Leftrightarrow$$

$$-\eta\mu x < \frac{f(x) - 1}{x} < \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = 0.$$

β. Η σχέση

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

εξασφαλίζει την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Επομένως, για να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο αρκεί να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x \cdot \eta \mu x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma \upsilon \nu x = 1,$$

οπότε από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \text{ συνεπώς θα είναι και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1.$$

Άσκηση 4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ. Αν η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty, 0]$, να αποδείξετε ότι:

$$0 < f^{-1}(x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \leq 0.$$

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot f^{-1}(x)]$.

Λύση

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει να είναι $x > 0$ και $1-x \geq 0$ δηλαδή $0 < x \leq 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού είναι $D_f = (0, 1]$.

β. Για να αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφεται πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι 1-1, οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη.

Για $x_1 < x_2$ τα οποία ανήκουν στο D_f έχουμε:

$$\ln x_1 < \ln x_2 \quad (1) \text{ και } 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{1-x_1} < -\sqrt{1-x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f^{-1} έχει:

- πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $(-\infty, 0]$ και
- σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή το $(0, 1]$.

Επομένως θα ισχύει $0 < f^{-1}(x) \leq 1$ για κάθε $x \leq 0$.

δ. Για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ έχουμε:

$$0 < f^{-1}(x) \leq 1 \xRightarrow{\cdot x^2 \geq 0} 0 \cdot x^2 < x^2 \cdot f^{-1}(x) \leq 1 \cdot x^2 \Rightarrow 0 < x^2 \cdot f^{-1}(x) \leq x^2$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot f^{-1}(x)] = 0.$$

Άσκηση 5.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

β. Να αποδείξετε ότι ισχύει $x \cdot f(x) > 0$, κοντά στο 0.

γ. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $|x \cdot f(x) \cdot g(x) - x^2| \leq x^2 \cdot f^2(x)$ κοντά στο 0, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Λύση

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, με $x \in \mathbb{R}^*$ οπότε έχουμε:

$$f(x) = x \cdot h(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 2.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot h(x)] = 0 \cdot 2 = 0$ θα είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

β. Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 > 0$,

θα είναι $\frac{f(x)}{x} > 0$ κοντά στο 0,

άρα $x \cdot f(x) > 0$ κοντά στο 0.

γ. Έχουμε :

$$|x \cdot f(x) \cdot g(x) - x^2| \leq x^2 \cdot f^2(x) \text{ κοντά στο } 0,$$

Επομένως:

$$-x^2 \cdot f^2(x) \leq x \cdot f(x) \cdot g(x) - x^2 \leq x^2 \cdot f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$-x^2 \cdot f^2(x) + x^2 \leq x \cdot f(x) \cdot g(x) \leq x^2 \cdot f^2(x) + x^2 \Leftrightarrow$$

(διαιρούμε με $x \cdot f(x) > 0$)

$$\frac{-x^2 \cdot f^2(x) + x^2}{x \cdot f(x)} \leq g(x) \leq \frac{x^2 \cdot f^2(x) + x^2}{x \cdot f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x^2 \cdot f^2(x)}{x \cdot f(x)} + \frac{x^2}{x \cdot f(x)} \leq g(x) \leq \frac{x^2 \cdot f^2(x)}{x \cdot f(x)} + \frac{x^2}{x \cdot f(x)} \Leftrightarrow$$

$$-x \cdot f(x) + \frac{x}{f(x)} \leq g(x) \leq x \cdot f(x) + \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$-x \cdot f(x) + \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} \leq g(x) \leq x \cdot f(x) + \frac{1}{\frac{f(x)}{x}}.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-x \cdot f(x) + \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot f(x) + \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} \right) = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 6.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x) + 1 \geq \sqrt{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell, \ell \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε το ℓ .

β. Αν $f(x) \leq f^2(x) + \frac{x^2}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Λύση

α. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) + 1 \geq \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) \geq \sqrt{x^2 + 1} - 1.$$

Για $x > 0$ παίρνουμε:

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \quad (1),$$

ενώ για $x < 0$ παίρνουμε :

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \quad (2).$$

Για $x \neq 0$ είναι

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} =$$

$$\frac{x^2}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right] = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ συμπεραίνουμε αντίστοιχα ότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ell \geq 0 \quad (3).$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \ell \leq 0 \quad (4).$$

Οι σχέσεις (3) και (4) μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell = 0.$$

β. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x)+1 \geq \sqrt{x^2+1} \text{ και } f(x) \leq f^2(x) + \frac{x^2}{2},$$

οπότε έχουμε:

$$\sqrt{x^2+1}-1 \leq f(x) \leq f^2(x) + \frac{x^2}{2}.$$

Διαιρούμε κάθε μέλος της παραπάνω σχέσης με $x^2 \neq 0$, για να προκύψει μια νέα ανισοτική σχέση για τη συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το όριο:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{f^2(x) + \frac{x^2}{2}}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{x^2}{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{1}{2} \quad (5).$$

Για $x \neq 0$ είναι

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} =$$

$$\frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2} \quad (6).$$

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{1}{2} \right] = 0^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (7).$$

Από τις σχέσεις (5), (6) και (7) λόγω του κριτηρίου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 7.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h)$.

γ. Αν είναι $f(x) \neq 1$ κοντά στο 1, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 3| + f(x) - 3}{f(x) - 1}$.

Λύση

α. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2.$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

β. Θέτουμε $1 + h = x$. Όταν το $h \rightarrow 0$ το $x \rightarrow 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ επομένως } \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = 1.$$

γ. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f^2(x) - 3] = -2 < 0$$

θα είναι $f^2(x) - 3 < 0$ κοντά στο 1.

Έτσι έχουμε :

$$\frac{|f^2(x) - 3| + f(x) - 3}{f(x) - 1} = \frac{-f^2(x) + 3 + f(x) - 3}{f(x) - 1} = \frac{-f^2(x) + f(x)}{f(x) - 1} = \frac{-f(x)(f(x) - 1)}{f(x) - 1} = -f(x).$$

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 3| + f(x) - 3}{f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [-f(x)] = -1.$$

Άσκηση 8.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x \cdot e^{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

α. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x}{e} \leq f(x) \leq e \cdot x, \text{ για κάθε } x > 0$$

και

$$e \cdot x \leq f(x) \leq \frac{x}{e}, \text{ για κάθε } x < 0.$$

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

α. Έχουμε :

$$-1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)} \leq e^1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq e^{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)} \leq e \quad (1).$$

Έτσι πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1) με x παίρνουμε:

$$\frac{x}{e} \leq f(x) \leq e \cdot x, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (2)$$

και

$$e \cdot x \leq f(x) \leq \frac{x}{e}, \text{ για κάθε } x < 0 \quad (3).$$

β. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e \cdot x) = 0,$$

έτσι από τις σχέσεις (2) και (3) λόγω του κριτηρίου παρεμβολής παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Άσκηση 9.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \epsilon\phi x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

Λύση

Για $x < \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2},$$

ενώ για $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$\frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{1 + \eta\mu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1 - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{1}{1 + \eta\mu x} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{1}{1 + \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{1}{1 + \eta\mu x},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{1}{1 + \eta\mu x} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$, αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι άνισα.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

$$f^2(x) \leq x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0.$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0.$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Λύση

α. Ισχύει :

$$0 \leq f^2(x) \leq x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0.$$

β. Από τη σχέση (1) προκύπτει :

$$0 \leq |f(x)| \leq |x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0.$$

γ. Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Άσκηση 2.

Έστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

$$f^{-1}(x) \leq x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = 1.$$

α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι : $y \leq \frac{y^2 + 1}{2}$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

α. Έχουμε:

$$f^{-1}(x) \leq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και επειδή η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως αύξουσα συμπεραίνουμε ότι:

$$f(f^{-1}(x)) \leq f(x),$$

άρα $x \leq f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Για $y \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$y \leq \frac{y^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2y \leq y^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (y - 1)^2$$

που είναι αληθής πρόταση, άρα ισχύει και το ζητούμενο.

γ. Στα προηγούμενα ερωτήματα αποδείξαμε :

$$x \leq f(x) \leq \frac{f^2(x) + 1}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 1}{2} = 1,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Άσκηση 3.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

$$-4x^3 \leq f(x) \leq 3x^4 + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 3}{x + 1} = 5.$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -1} g(x).$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 4}{x + 1}.$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)g(x) + 12}{x + 1}.$$

Λύση

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \frac{g(x) + 3}{x + 1}$, με $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ οπότε έχουμε:

$$g(x) + 3 = (x + 1)h(x) \Leftrightarrow g(x) = (x + 1)h(x) - 3, \text{ για κάθε } x \neq -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 5.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -1} [(x + 1)h(x) - 3] = 0 \cdot 5 - 3 = -3 \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -3.$$

β. Τροποποιούμε τη δοθείσα σχέση, ώστε να δημιουργήσουμε μια νέα ανισοτική σχέση για τη συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το όριο:

$$-4x^3 \leq f(x) \leq 3x^4 + 1 \Leftrightarrow$$

$$-4x^3 - 4 \leq f(x) - 4 \leq 3x^4 + 1 - 4 \Leftrightarrow$$

$$-4x^3 - 4 \leq f(x) - 4 \leq 3x^4 - 3 \quad (1)$$

Για $x < -1$, διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x + 1$ παίρνουμε:

$$\frac{-4x^3 - 4}{x + 1} \geq \frac{f(x) - 4}{x + 1} \geq \frac{3x^4 - 3}{x + 1} \quad (2),$$

ενώ για $x > -1$, διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x + 1$ παίρνουμε:

$$\frac{-4x^3 - 4}{x + 1} \leq \frac{f(x) - 4}{x + 1} \leq \frac{3x^4 - 3}{x + 1} \quad (3).$$

Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε τα παρακάτω όρια:

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x^3 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4(x^3 + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow -1} [-4(x^2 - x + 1)] = -12$$

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^4 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x + 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} [3(x - 1)(x^2 + 1)] = -12.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x^3 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 - 3}{x + 1} = -12,$$

έτσι από τις σχέσεις (2) και (3) λόγω του κριτηρίου παρεμβολής παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - 4}{x + 1} = -12 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - 4}{x + 1} = -12,$$

δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 4}{x + 1} = -12.$$

γ. Διαπιστώνουμε την απροσδιοριστία του ορίου που αναζητούμε, (αφού λόγω του κριτηρίου παρεμβολής από τη δοθείσα σχέση προκύπτει $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$) οπότε καταφεύγουμε σε κατάλληλη μετατροπή του τύπου της συνάρτησης.

Έτσι, κοντά στο -1 έχουμε:

$$\frac{f(x)g(x) + 12}{x + 1} = \frac{f(x)g(x) - 4g(x) + 4g(x) + 12}{x + 1} =$$

$$\frac{f(x)g(x) - 4g(x)}{x + 1} + \frac{4g(x) + 12}{x + 1} = \frac{f(x) - 4}{x + 1} g(x) + 4 \frac{g(x) + 3}{x + 1} \quad (4).$$

Έτσι, λόγω της σχέσης (4) παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)g(x) + 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{f(x) - 4}{x + 1} g(x) + 4 \frac{g(x) + 3}{x + 1} \right] = -12 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 = 56.$$

Άσκηση 4.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\sqrt{x-3} \cdot \eta\mu^2 \left(\frac{1}{x-3} \right) \right]$.

Λύση

Έχουμε:

$$\left| \eta\mu^2 \left(\frac{1}{x-3} \right) \right| \leq 1,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} \cdot \left| \eta\mu^2 \left(\frac{1}{x-3} \right) \right| &\leq \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \\ -\sqrt{x-3} &\leq \sqrt{x-3} \cdot \eta\mu^2 \left(\frac{1}{x-3} \right) \leq \sqrt{x-3}. \end{aligned}$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 3} (-\sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-3} = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[\sqrt{x-3} \cdot \eta\mu^2 \left(\frac{1}{x-3} \right) \right] = 0.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 10/01/2014