

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ - ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

[Ενότητες Κριτήριο Παρεμβολής - Τριγωνομετρικά Όρια - Όριο Σύνθετης Συνάρτησης του
κεφ.1.5 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Αν ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-5)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$.

Λύση

Έχουμε ότι $|f(x) - 2x| \leq (x-5)^2$ (1).

Για κάθε $x \neq 5$ από την (1) παίρνουμε:

$$-(x-5)^2 \leq f(x) - 2x \leq (x-5)^2. \text{ Άρα:}$$

$$2x - (x-5)^2 \leq f(x) \leq 2x + (x-5)^2.$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 5} [2x - (x-5)^2] = \lim_{x \rightarrow 5} [2x + (x-5)^2] = 10.$$

Τότε λόγω κριτηρίου παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10$.

Από την (1) για $x = 5$ θα πάρουμε: $|f(5) - 10| \leq 0$.

Όμως, επειδή ισχύει $|f(5) - 10| \geq 0$, έχουμε:

$$|f(5) - 10| = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(5) - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(5) = 10.$$

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$.

Μεθοδολογία

Αν έχουμε ανισωτική σχέση που το ένα μέλος της περικλείεται σε απόλυτη τιμή, δημιουργούμε διπλή ανισότητα και εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^3 + x}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}.$$

Λύση

α) Έστω $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x^3 + x}$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{0\}$. Τότε για $x \neq 0$ έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου κοντά στο 0 και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

β) Έστω $f(x) = \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{0\}$. Τότε για $x \neq 0$ έχει νόημα η

αναζήτηση του ορίου κοντά στο 0 και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x^2 + 4 - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 4} + 2) = 1 \cdot 4 = 4.$$

Παράδειγμα 3.

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(2x-6)}{3x-9}$.

Λύση

Έστω $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(2x-6)}{3x-9}$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{3\}$, άρα έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου κοντά στο 3.

Είναι: $\lim_{x \rightarrow 3} \eta\mu(2x-6) = \lim_{x \rightarrow 3} (3x-9) = 0$, άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Για $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(2x-6)}{3x-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu[2(x-3)]}{3(x-3)}$ (1)

Θέτουμε $x-3 = u$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$.

Άρα, όταν το $x \rightarrow 3$, το $u \rightarrow 0$. Τότε το όριο (1) γίνεται:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2u)}{3u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu(2u)}{3(2u)} = \frac{2}{3} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2u)}{2u} \quad (2)$$

Θέτουμε $2u = \omega$ και $\lim_{u \rightarrow 0} 2u = 0$, άρα το όριο (2) γίνεται $\frac{2}{3} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

Μεθοδολογία

Για τον υπολογισμό σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής $\eta\mu(f(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu(f(x))$ θέτουμε $f(x) = u$ και μετασχηματίζουμε το όριο όπως έχει αναφερθεί στην αντίστοιχη θεωρία.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\eta \mu x}$ και πεδίο ορισμού

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου. Παρατηρούμε όμως ότι για $x = 0$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, άρα έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Οπότε για τα $x \neq 0$ τα οποία βρίσκονται “αρκούντως κοντά στο 0”, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με x και έχουμε:

$$\frac{1 - \sin x}{\eta \mu x} = \frac{\frac{1 - \sin x}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \sin x}{x}}{\frac{\eta \mu x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Μεθοδολογία

Σε τριγωνομετρικά όρια της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, για να αρθεί η απροσδιοριστία θέτουμε ως στόχο να

εμφανίσουμε τα γνωστά όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$. Για να επιτευχθεί ο στόχος

κάνουμε τις κατάλληλες ενέργειες (διαιρούμε με x , ή πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση, ή κάνουμε παραγοντοποίηση ή σε σύνθετες συναρτήσεις θέτουμε συνάρτηση κ.λ.π.).

Παράδειγμα 5.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$x^5 \leq f(x) \leq x^6 + 3x^4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$

Λύση

- i. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 = \lim_{x \rightarrow 0} (x^6 + 3x^4) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

- ii. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με x^2 , ώστε να προκύψει η συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το όριο. Έτσι για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x^5}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{x^6 + 3x^4}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$x^3 \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq x^4 + 3x^2.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + 3x^2) = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$$

- iii. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με x , ώστε να προκύψει η συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το όριο.

Έτσι για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{x^5}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x^6 + 3x^4}{x} \Leftrightarrow$$

$$x^4 \leq \frac{f(x)}{x} \leq x^5 + 3x^3.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^5 + 3x^3) = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (2).$$

Ενώ για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{x^5}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x^6 + 3x^4}{x} \Leftrightarrow$$

$$x^4 \geq \frac{f(x)}{x} \geq x^5 + 3x^3.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^4 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^5 + 3x^3) = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (3).$$

Από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται ανισότητα της μορφής $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και ζητείται το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ μιας συνάρτησης f , κάνουμε τις κατάλληλες ενέργειες, ώστε η ανισότητα να πάρει τη μορφή $p(x) \leq f(x) \leq q(x)$, προσδοκώντας να πληρούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου παρεμβολής, δηλαδή οι συναρτήσεις p και q να έχουν το ίδιο όριο στο x_0 .

Παράδειγμα 6.

Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ όταν:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1 - \sin x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \frac{|\eta \mu x|}{x}.$$

Λύση

α) Για $x < 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0,$$

ενώ για $x > 0$ έχουμε

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sin x}{x} \cdot \sqrt{x},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \sin x}{x} \cdot \sqrt{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα.

β) Περιοριζόμαστε σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης για να προσδιορίσουμε το πρόσημο του $\eta \mu x$ και να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή. Ένα τέτοιο

σύνολο είναι το $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έτσι για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\eta \mu x}{x} = -1,$$

ενώ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} = 1.$$

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι άνισα.

Μεθοδολογία

Για τον υπολογισμό ενός ορίου μιας συνάρτησης στο x_0 μπορούμε να περιορίζουμε τη συνάρτηση σε κατάλληλο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της κοντά στο x_0 .

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Αν $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$, για κάθε $x \geq -2$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x+1}$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}$.

Λύση

α) Για $x \geq -2$ έχουμε $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$.

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -1} 2\sqrt{x+2} = 2\sqrt{2-1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = -1+3 = 2$.

Άρα, λόγω κριτηρίου παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

Μεθοδολογία

Αν έχουμε διπλή ανισωτική σχέση της μορφής $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και θέλουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής.

β) Έχουμε $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$

$$2\sqrt{x+2} - 2 \leq f(x) - 2 \leq x+3-2$$

$$2\sqrt{x+2} - 2 \leq f(x) - 2 \leq x+1$$

Για $x > -1$ το $x+1 > 0$, άρα:

$$\frac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} \leq \frac{f(x)-2}{x+1} \leq \frac{x+1}{x+1}$$

$$\frac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} \leq \frac{f(x)-2}{x+1} \leq 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2(\sqrt{x+2}-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2((x+2)-1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{\sqrt{x+2}+1} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1.$$

Άρα, λόγω κριτηρίου παρεμβολής, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-2}{x+1} = 1.$

Για $-2 < x < -1$ το $x+1 < 0$, άρα:

$$\frac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} \geq \frac{f(x)-2}{x+1} \geq \frac{x+1}{x+1}$$

$$\frac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} \geq \frac{f(x)-2}{x+1} \geq 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2\sqrt{x+2}-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2(\sqrt{x+2}-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2((x+2)-1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{\sqrt{x+2}+1} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1.$$

Άρα, λόγω κριτηρίου παρεμβολής, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-2}{x+1} = 1.$

Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-2}{x+1} = 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x+1} = 1.$

Μεθοδολογία

Αν έχουμε διπλή ανισωτική σχέση της μορφής $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και θέλουμε το

$\lim_{x \rightarrow x_0}$ κάποιας συνάρτησης που μέρος της είναι η $f(x)$, εκτελούμε κατάλληλες πράξεις και στα

τρία μέλη της σχέσης ώστε στο μεσαίο μέρος της, να εμφανιστεί η συνάρτηση της οποίας ζητάμε το όριο.

$$v) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f^2(x) - 8}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(f^2(x) - 4)}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2[(f(x) - 2)(f(x) + 2)]}{(x + 1)(x + 2)} =$$

$$2 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 2}{x + 1} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 2}{x + 2} = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$$

Παράδειγμα 2.

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{\alpha^2 x + 3\alpha \eta \mu x}{x} \text{ και } g(x) = \frac{-2x^2 - 2x \sigma \upsilon \nu x + 2x}{x^2}.$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Λύση

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{\alpha^2 x + 3\alpha \eta \mu x}{x} = \alpha^2 + \frac{3\alpha \eta \mu x}{x}. \text{ Τότε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 x + 3\alpha \eta \mu x}{x} = \alpha^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\alpha \eta \mu x}{x} = \alpha^2 + 3\alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = \alpha^2 + 3\alpha \quad (1)$$

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } g(x) = \frac{-2x^2 - 2x \sigma \upsilon \nu x + 2x}{x^2} = -2 - \frac{2x(\sigma \upsilon \nu x - 1)}{x^2}. \text{ Τότε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 - 2x \sigma \upsilon \nu x + 2x}{x^2} = -2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sigma \upsilon \nu x - 2x}{x^2} =$$

$$-2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = -2 - 2 \cdot 0 = -2 \quad (2)$$

$$\text{Πρέπει } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

$$\text{Τότε από (1), (2): } \alpha^2 + 3\alpha = -2$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$$

$$\text{Άρα } \alpha = -1 \text{ ή } \alpha = -2.$$

Μεθοδολογία

Στον υπολογισμό τριγωνομετρικών ορίων προσπαθούμε να εμφανίσουμε τις μορφές $\frac{\eta \mu x}{x}$ και $\frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}$.

Παράδειγμα 3.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 + 4x - 5}$.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 + 4x - 5}$ με πεδίο ορισμού $D_f = (-\infty, -5) \cup (-5, 1) \cup (1, +\infty)$.

Άρα έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου κοντά στο 1. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 + 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+5)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+5} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)} \quad (1).$$

Αλλά για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)}$ θέτουμε $x-1 = u$ (2) και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ (3).

Άρα όταν το $x \rightarrow 1$, το $u \rightarrow 0$.

Η (1) βάσει των (2),(3) γίνεται $\frac{1}{6} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(u)}{(u)} = \frac{1}{6}$

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x \cdot \eta\mu 7x}$ και πεδίο ορισμού

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa \frac{\pi}{7}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu 7x = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου. Παρατηρούμε όμως ότι για $x = 0$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, άρα έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Οπότε για τα $x \neq 0$ τα οποία βρίσκονται “αρκούντως κοντά στο 0”, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με x και έχουμε:

$$f(x) = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x \cdot \eta\mu 7x} = \frac{\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{x \cdot \eta\mu 7x} = \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu 7x} = \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}}{\frac{\eta\mu 7x}{x}} \quad (1).$$

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x}{x}$, θέτουμε $\omega = 7x$. Όταν το $x \rightarrow 0$ και το $\omega \rightarrow 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 7x}{x} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \omega}{\frac{\omega}{7}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{7\eta\mu \omega}{\omega} = 7 \cdot 1 = 7.$$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}}{\frac{\eta\mu 7x}{x}} \right] = 1 \cdot \frac{0}{7} = 0,$$

και λόγω της σχέσης (1) παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x \cdot \eta\mu 7x} = 0.$$

Μεθοδολογία

Σε τριγωνομετρικά όρια της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, για να αρθεί η απροσδιοριστία θέτουμε ως στόχο να

εμφανίσουμε τα γνωστά όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Για να επιτευχθεί ο στόχος

κάνουμε τις κατάλληλες ενέργειες (διαιρούμε με x , ή πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση, ή κάνουμε παραγοντοποίηση ή σε σύνθετες συναρτήσεις θέτουμε συνάρτηση κ.λ.π.).

Παράδειγμα 5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x+2) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ και πεδίο ορισμού $A = (-2, +\infty)$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Λύση

Για $x \in (-2, +\infty)$ έχουμε:

$$\left| \sigma\upsilon\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \right| \leq 1,$$

οπότε

$$|x+2| \cdot \left| \sigma\upsilon\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \right| \leq |x+2| \Leftrightarrow -|x+2| \leq (x+2) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \leq |x+2|.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -2} [-|x+2|] = \lim_{x \rightarrow -2} |x+2| = 0,$$

συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left[(x+2) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \right] = 0$$

Μεθοδολογία

Τα όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{g(x)} \right]$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ αντιμετωπίζονται με το

κριτήριο παρεμβολής ξεκινώντας από τη γνωστή ανίσωση $\left| \eta\mu \frac{1}{g(x)} \right| \leq 1$ ή $\left| \sigma\upsilon\nu \frac{1}{g(x)} \right| \leq 1$

αντίστοιχα και πολλαπλασιάζοντας με $|f(x)|$.

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right)$.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R} - \{0\}$. Άρα, έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου κοντά στο 0.

Ισχύει ότι $\left| \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Τότε:

$$\left| \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \right|$$

$$-\left| \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \right| \leq \left(\frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right) \leq \left| \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \right|$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^{2011}}{x^{2011}} x^{2010} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^{2011}}{x^{2011}} \left| \lim_{x \rightarrow 0} x^{2010} \right|,$$

$$\text{όπου } \left| \lim_{x \rightarrow 0} x^{2010} \right| = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^{2011}}{x^{2011}} = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \right| = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Ομοίως και το } \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\left| \frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \right| \right] = 0.$$

$$\text{Άρα λόγω του κριτηρίου παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x^{2011}}{x} \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Μεθοδολογία

Χρησιμοποιούμε τις ανισότητες $|\eta \mu x| \leq 1$ και $|\sigma \upsilon \nu x| \leq 1$, δημιουργούμε την συνάρτηση της οποίας το όριο αναζητούμε και αφού δημιουργήσουμε διπλή ανίσωση, εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής.

Παράδειγμα 2.

Αν $|f(x) - \eta\mu x| \leq 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Λύση

Έχουμε $|f(x) - \eta\mu x| \leq 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$ (1) και $\sigma\upsilon\nu 2x \leq 1$, άρα $1 - 2\sigma\upsilon\nu x \geq 0$.

Η (1) γίνεται $\sigma\upsilon\nu 2x - 1 \leq f(x) - \eta\mu x \leq 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$

$$\sigma\upsilon\nu 2x - 1 + \eta\mu x \leq f(x) \leq 1 - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu x$$

Για $x > 0$:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 2x - 1 + \eta\mu x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu x}{x}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 2x - 1}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\sigma\upsilon\nu 2x - 1)}{2x}.$$

$$\text{Θέτουμε } 2x = u. \text{ Τότε } \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\sigma\upsilon\nu 2x - 1)}{2x} = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = 2 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu 2x - 1}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 + 1 = 1.$$

$$\text{Και ομοίως αποδεικνύεται } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu x}{x} = 1.$$

Άρα λόγω κριτηρίου παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ ομοίως για $x < 0$ αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Παράδειγμα 3.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

$$x-1 \leq f(x) \leq |x-1|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$ να βρείτε :

i. το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ii. το ℓ .

Λύση

i. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0,$$

οπότε από τη σχέση (1), συμπεραίνουμε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής, ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

ii. Για $x > 1$ η σχέση (1) δίνει:

$$x-1 \leq f(x) \leq |x-1| \Leftrightarrow$$

$$x-1 \leq f(x) \leq x-1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x-1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Επειδή το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ υπάρχει, ο υπολογισμός του πλευρικού ορίου $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1}$ αρκεί,

ώστε να συμπεράνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

Παρατήρηση: Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ από τη δοθείσα σχέση γιατί, για $x < 1$ παίρνουμε :

$$x-1 \leq f(x) \leq |x-1| \Leftrightarrow$$

$$x-1 \leq f(x) \leq -(x-1) \Leftrightarrow$$

$$1 \geq \frac{f(x)}{x-1} \geq -1$$

και δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου παρεμβολής.

Μεθοδολογία

Αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ο υπολογισμός ενός μόνο πλευρικού ορίου (π.χ του $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$) είναι αρκετός για τον προσδιορισμό του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Παράδειγμα 4.

α. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{|x^5 - 7| - 7}{x}$ και πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

β. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{|x^5 - 7| - 7}{x} \cdot f(x) \right] = 0.$$

Λύση

α. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - 7) = -7 < 0$, θα είναι $x^5 - 7 < 0$ κοντά στο 0.

Τότε κοντά στο 0 έχουμε :

$$g(x) = \frac{|x^5 - 7| - 7}{x} = \frac{7 - x^5 - 7}{x} = \frac{-x^5}{x} = -x^4.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^4) = 0.$$

β. Αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, έστω το $\alpha \in \mathbb{R}$ και ολικό μέγιστο έστω το $\beta \in \mathbb{R}$, θα ισχύει :

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Κοντά στο 0 έχουμε :

$$g(x) = -x^4 < 0$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $g(x)$ παίρνουμε:

$$\alpha g(x) \geq g(x)f(x) \geq \beta g(x).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} [\alpha g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [\beta g(x)] = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{|x^5 - 7| - 7}{x} \cdot f(x) \right] = 0 .$$

Μεθοδολογία

Από το πρόσημο του ορίου μιας συνάρτησης f στο x_0 συμπεραίνουμε το πρόσημο της κοντά στο x_0 .

Παράδειγμα 5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\eta \mu x^2 - 2x^2}$ και πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Λύση

i. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu x^2 - 2x^2) = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του

πηλίκου. Παρατηρούμε όμως ότι για $x = 0$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος, άρα

έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$. Οπότε για τα $x \neq 0$ τα οποία βρίσκονται

“αρκούντως κοντά στο 0”, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με x και έχουμε:

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{\eta \mu x^2 - 2x^2} = \frac{\frac{1 - \sin x}{x^2}}{\frac{\eta \mu x^2 - 2x^2}{x^2}} = \frac{\frac{1 - \sin x}{x^2}}{\frac{\eta \mu x^2}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}} = \frac{\frac{1 - \sin x}{x^2}}{\frac{\eta \mu x^2}{x^2} - 2} \quad (1).$$

Υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

- Για x κοντά στο 0 έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin x}{x^2} &= \frac{1 - \sin x}{x^2} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} = \\ &= \left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \right) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Θέτουμε $x^2 = \omega$. Όταν το $x \rightarrow 0$ και το $\omega \rightarrow 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^2}{x^2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta \mu \omega}{\omega} = 1$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1-2} = -\frac{1}{2}.$$

ii. Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - \sin \frac{1}{x}}{\eta\mu \frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \sin \frac{1}{x}}{\frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2} - 2}{x^2}} = \frac{x^2 \left[1 - \sin \frac{1}{x}\right]}{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2} - 2} = \frac{x^2 - x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2} - 2} \quad (2).$$

- Ισχύει $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$, άρα $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$ και είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin \frac{1}{x} \right] = 0$.
- Ομοίως $-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x^2} \leq 1$, άρα $-x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x^2} \leq x^2$ και είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \eta\mu \left(\frac{1}{x^2} \right) \right] = 0$.

Με τη βοήθεια της σχέσης (2) έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{0-0}{0-2} = 0.$$

Μεθοδολογία

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$, αντικαθιστούμε (στον τύπο του $f(x)$) το x με $\frac{1}{x}$ και έπειτα υπολογίζουμε το όριο. Αν το όριο είναι απροσδιόριστης μορφής, και το $f(x)$ περιέχει τριγωνομετρικές συναρτήσεις, τότε:

- Είτε εμφανίζουμε τα γνωστά όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}$ ή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$.
- Είτε ξεκινάμε από τις ανισοτικές σχέσεις $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ή $\left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq 1$

και με κατάλληλους μετασχηματισμούς αφού καταλήξουμε στη μορφή που θέλουμε, στη συνέχεια εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής.