

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ -
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

[Κεφ. 1.6: Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ - Κεφ. 1.7: Όρια Συνάρτησης στο Άπειρο του
σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α - Ερωτήσεις Θεωρίας

Ερώτηση 1.

- i. Να εξηγήσετε με λίγα λόγια τι σημαίνει ότι το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} = +\infty$.
- ii. Να εξηγήσετε με λίγα λόγια τι σημαίνει ότι το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x-2} = -\infty$.

Απάντηση

- i. Καθώς το x κινούμενο στον άξονα x'/x πλησιάζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2, οι τιμές της $f(x) = \frac{3}{x-2}$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M .
- ii. Καθώς το x κινούμενο στον άξονα x'/x πλησιάζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό 2, οι τιμές της $f(x) = \frac{-1}{x-2}$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της f στο 2.

Λύση

- i. Πρέπει $x^2 - x - 2 \neq 0$. Έχουμε $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$.

$$\text{Άρα } D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$$

- ii. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1) \cdot (x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x-1) \cdot \frac{1}{x-2} \right]\end{aligned}$$

- Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ και $x-2 > 0$ για $x > 2$, είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Επειδή επιπλέον είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

- Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$ και $x-2 < 0$ για $x < 2$, είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

Επειδή επιπλέον είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = 1$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Άσκηση 2.

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x^2 - 4) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \right]$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0$ και $(x+1)^2 > 0$ για $x \neq -1$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty. \text{ Επειδή επιπλέον } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 4) = -3, \text{ έχουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x^2 - 4) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \right] = -\infty$$

Άσκηση 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2) \cdot \eta\mu x}{x^3 - 4x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.

Λύση

- i. Πρέπει $x^3 - 4x \neq 0$.

Έχουμε $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$ ή $x = 2$.

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

- ii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)\eta\mu x}{x(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\eta\mu x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{1}{x+2} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2) = 0$ και $x+2 > 0$ για $x > -2$, είναι $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$.

Είναι επίσης $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{\eta\mu(-2)}{-2} = \frac{-\eta\mu 2}{-2} = \frac{\eta\mu 2}{2}$ και επειδή $0 < 2 < \pi$ είναι $\frac{\eta\mu 2}{2} > 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{1}{x+2} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = +\infty$

Άσκηση 4.

Για μια συνάρτηση f που ορίζεται κοντά στο $\frac{\pi}{2}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2010 \cdot \eta\mu x + 1}{f(x)} = +\infty$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

Λύση

Αν θέσουμε $g(x) = \frac{2010 \cdot \eta\mu x + 1}{f(x)}$, τότε $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$ και $f(x) = \frac{2010 \cdot \eta\mu x + 1}{g(x)}$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2010 \cdot \eta\mu x + 1) = 2010 \cdot 1 + 1 = 2011$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2010 \cdot \eta\mu x + 1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(2010 \cdot \eta\mu x + 1) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = 2011 \cdot 0 = 0$

Άσκηση 5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Λύση

- i. Πρέπει $x+2 \neq 0$ και $x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
- ii. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2+4}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Μια συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1} + 3f(x)) = 6$,
να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Λύση

Αν θέσουμε $g(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 1} + 3f(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 6$ και

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x}{3} + \frac{g(x)}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} + \frac{g(x)}{3}. \text{ Επομένως}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} + \frac{g(x)}{3} \right] = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{6}{3} = 2$$

Άσκηση 7.

Να υπολογίσετε τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{x}.$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{x}.$

Λύση

i. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| + |x-2|}{x}.$

Επειδή $x \rightarrow +\infty$, θεωρούμε ότι $x > 2$ οπότε $x-1 > 0$ και $x-2 > 0$.

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| + |x-2|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+x-2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x} = 2$$

ii. Επειδή $x \rightarrow -\infty$, θεωρούμε ότι $x < 1$ οπότε $x-1 < 0$ και $x-2 < 0$. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1| + |x-2|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1-x+2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{x} = -2$$

Άσκηση 8.

1) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ ισχύει: $|x^2 - 4|f(x) \leq x - 2017$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει: $\frac{1}{(x-1)^2} \leq f(x)$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

1) Αν $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$, τότε $x^2 - 4 \neq 0$ οπότε η σχέση $|x^2 - 4|f(x) \leq x - 2017$ γίνεται:

$$f(x) \leq \frac{x - 2017}{|x^2 - 4|} \quad (1).$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2017}{|x^2 - 4|} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{|x^2 - 4|} (x - 2017) \right] = (+\infty)(-2015) = -\infty$, τότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty.$$

2) Έχουμε $\frac{1}{(x-1)^2} \leq f(x)$, για κάθε $x \neq 1$. (2)

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ τότε από την (2) έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- ii. Να βρεθούν οι α και β ώστε να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση

- i. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$.
- ii. Για να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ πρέπει και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

Για $x < 1$ έχουμε $f(x) = \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1}$, οπότε $\alpha x + \beta - 1 = (x - 1) \cdot f(x)$.

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x + \beta - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x - 1) \cdot f(x)]$$

$$\alpha + \beta - 1 = 0 \cdot 2$$

$$\alpha + \beta = 1 \quad (1)$$

Από την $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ και με $\alpha + \beta = 1$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x + \beta - (\alpha + \beta)}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(x - 1)}{x - 1} = 2$$

$$\alpha = 2$$

Για $\alpha = 2$, από την (1) έχουμε $\beta = -1$.

Άσκηση 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x^3 - 2x + 5| - |x + 7|}{(x - 2)^2}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Λύση

i. Πρέπει $(x - 2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ii. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 5) = 9 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 7) = 9 > 0$, κοντά στο 2 είναι

$x^3 - 2x + 5 > 0$ και $x + 7 > 0$. Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^3 - 2x + 5| - |x + 7|}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x + 5 - x - 7}{(x - 2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 1)^2}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 1)^2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[(x + 1)^2 \cdot \frac{1}{x - 2} \right]$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$ και $x - 2 > 0$ για $x > 2$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$. Επίσης είναι και

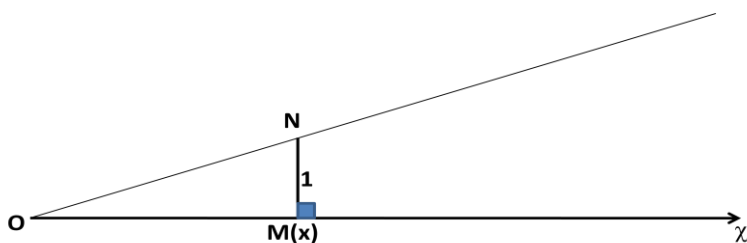
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1)^2 = 9 \text{ και επομένως } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Άσκηση 3.

Στον ημιάξονα Ox παίρνουμε σημείο M με τετμημένη x και φέρνουμε τμήμα MN κάθετο στον Ox με μέτρο 1.

- Να εκφράσετε το μέτρο του τμήματος ON συναρτήσει του x .
- Να υπολογίσετε το όριο του πηλίκου $\frac{ON}{OM}$, όταν το M απομακρύνεται στο άπειρο.
- Να υπολογίσετε το όριο της διαφοράς $(ON) - (OM)$ όταν το M απομακρύνεται στο άπειρο.

Λύση



- Από το ορθογώνιο τρίγωνο OMN έχουμε:

$$(ON)^2 = (OM)^2 + (MN)^2$$

$$(ON)^2 = x^2 + 1^2$$

$$(ON) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Άρα το μέτρο του τμήματος ON δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \geq 0$.

- Επειδή $\frac{ON}{OM} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$, ζητάμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x}$$

Επειδή $x > 0$, έχουμε $\sqrt{x^2} = x$ και το όριο γίνεται

$$\ell \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \ell \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \ell \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

- Έχουμε $(ON - OM) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

αφού: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) = +\infty .$

Άσκηση 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - 3x$.

- i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 6x)$.

Λύση

- i. Για $x \rightarrow -\infty$ είναι $x < 0$ οπότε $|x| = -x$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{1}{x^2}\right)} - 3x}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 3x}{x} \\&= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) = -6\end{aligned}$$

- ii. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 6x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x + 6x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} + 3x) \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 + 1 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 1} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - 3x}\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) = +\infty$, έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 6x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - 3x} = 0$$

Άσκηση 5.

- i. Για μια συνάρτηση f ισχύει $\frac{3x-5}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x^2+10}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - \eta\mu 2x}{x^2 + 100}$.

Λύση

- i. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+10}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$. Οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής ισχύει και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

- ii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - \eta\mu 2x}{x^2 + 100} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2 + 100} - \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 100} \right)$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2 + 100} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2} \right) = 5 \text{ και } \left| \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 100} \right| \leq \frac{1}{x^2 + 100}.$$

$$\text{Επειδή } -\frac{1}{x^2 + 100} \leq \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 100} \leq \frac{1}{x^2 + 100} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 100} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2 + 100} \right) = 0,$$

$$\text{παίρνουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 100} = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - \eta\mu 2x}{x^2 + 100} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2 + 100} - \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 100} \right) = 5 + 0 = 5$$

Άσκηση 6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{16x^2-4x}}$

- i. Να δικαιολογήσετε ότι μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
- ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x)$.

Λύση

- i. Επειδή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (16x^2 - 4x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 16x^2 = +\infty$, υπάρχουν διαστήματα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ και $(-\infty, \beta)$, όπου $16x^2 - 4x > 0$ και επομένως έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- ii. Επειδή $x \rightarrow +\infty$ θεωρούμε ότι $x > 0$ και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{16x^2-4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2 \left(16 - \frac{4}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\left(16 - \frac{4}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{|x| \cdot \sqrt{\left(16 - \frac{4}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x \cdot \sqrt{\left(16 - \frac{4}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{\left(16 - \frac{4}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{\left(16 - \frac{4}{x}\right)}} = \frac{1}{4}$$

- iii. Επειδή η f ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, 0)$, αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(0, \delta)$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+3}{\sqrt{16x^2-4x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x+3) \cdot \frac{1}{\sqrt{16x^2-4x}} \right]$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{16x^2-4x} = 0$ και $16x^2-4x > 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{16x^2-4x}} = +\infty$. Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Ομοίως, επειδή η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής $\left(\varepsilon, \frac{1}{4}\right)$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} f(x)$.

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{x+3}{\sqrt{16x^2-4x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \left[(x+3) \cdot \frac{1}{\sqrt{16x^2-4x}} \right].$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \sqrt{16x^2-4x} = 0$ και $16x^2-4x > 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{1}{\sqrt{16x^2-4x}} = +\infty$. Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} (x+3) = \frac{13}{4}$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = +\infty$.

Άσκηση 7.

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^x}{3^x + 2^x} \right)$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 5^x}{2\alpha^x - 5^x}$ για τις διάφορες τιμές του θετικού αριθμού α .

Λύση

i. Έχουμε $\frac{5^x}{3^x + 2^x} = \frac{\frac{5^x}{5^x}}{\frac{3^x}{5^x} + \frac{2^x}{5^x}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x}$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x \right] = 0$ και $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$

έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x} \right) = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^x}{3^x + 2^x} \right) = +\infty$

ii.

- Αν $\alpha > 5$ τότε $0 < \frac{5}{\alpha} < 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{\alpha} \right)^x = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 5^x}{2\alpha^x - 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha^x}{\alpha^x} + \left(\frac{5}{\alpha}\right)^x}{2 \cdot \frac{\alpha^x}{\alpha^x} - \left(\frac{5}{\alpha}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \left(\frac{5}{\alpha}\right)^x}{2 - \left(\frac{5}{\alpha}\right)^x} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

- Αν $\alpha = 5$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 5^x}{2\alpha^x - 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^x}{5^x} = 2$

- Αν $0 < \alpha < 5$ τότε $0 < \frac{\alpha}{5} < 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{5} \right)^x = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 5^x}{2\alpha^x - 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^x + 1}{2 \cdot \left(\frac{\alpha}{5}\right)^x - 1} = -1.$$

Άσκηση 8.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{2x^2 + \theta}{2x}\right)$ με $\theta > 0$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iv. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$.

Λύση

i. Πρέπει $\frac{2x^2 + \theta}{2x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα $D_f = (0, +\infty)$

ii. Θέτουμε $u = \frac{2x^2 + \theta}{2x}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + \theta}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} (2x^2 + \theta) = +\infty$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{2x^2 + \theta}{2x}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

iii. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + \theta}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$

έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x^2 + \theta}{2x}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$

iv. Επειδή $x \rightarrow +\infty$ θεωρούμε ότι $x > 0$ και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{2x^2 + \theta}{2x}\right) - \ln x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{2x^2 + \theta}{2x^2} \right) \right]$$

$$= \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + \theta}{2x^2} \right) \right] = \ln 1 = 0$$

Άσκηση 9.

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x).$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x).$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{4x^2 + x} + x).$

Λύση

i. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x}} + x}, (x > 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}$$

ii. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + x} - 2x)(\sqrt{4x^2 + x} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x}\right)} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2x}, (x > 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} = \frac{1}{4}$$

iii. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{4x^2 + x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right) - \left(\sqrt{4x^2 + x} - 2x \right) \right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Άσκηση 10.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x) = (\alpha - 1)x^2 - x + 5$ και

$Q(x) = (\alpha + 2)x^3 + \alpha x^2 + 2$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2 - x + 5}{(\alpha + 2)x^3 + \alpha x^2 + 2}$$

- Αν $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -2$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x^2}{(\alpha + 2)x^3} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- Για $\alpha = 1$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 5}{3x^3 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x^3} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- Για $\alpha = -2$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - x + 5}{-2x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{-2x^2} = \frac{3}{2}$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } \alpha \neq 1 \text{ και } \alpha \neq -2 \\ 0, & \text{για } \alpha = 1 \\ \frac{3}{2}, & \text{για } \alpha = -2 \end{cases}$$

Άσκηση 11.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1} - (\kappa x + \lambda)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

Να βρείτε για ποιες τιμές των κ, λ είναι

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Λύση

i. Έχουμε $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1} - (\kappa x + \lambda) = \frac{(1-2\kappa)x^2 - (\kappa+2\lambda)x + 1-\lambda}{2x+1}$

Αν $1-2\kappa \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq \frac{1}{2}$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2\kappa)}{2} x \notin \mathbb{R}$.

Επομένως πρέπει $\kappa = \frac{1}{2}$, οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right)x + 1 - \lambda}{2x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right)}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα, για να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ πρέπει $\kappa = \frac{1}{2}$ και $\lambda = -\frac{1}{4}$

ii. Με ανάλογους συλλογισμούς βρίσκουμε ότι για να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ πρέπει να είναι

$$\kappa = \frac{1}{2} \text{ και } \lambda = -\frac{5}{4}.$$

Άσκηση 12.

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \text{ να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^4(x) + g^4(x)} = +\infty.$$

Λύση

- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει
$$\frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^4(x) + g^4(x)} \geq \frac{1}{f^2(x) + g^2(x)}. \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^4(x) + g^4(x)}}_{+} \geq \frac{1}{f^2(x) + g^2(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^4(x) + g^4(x)} \right)^2 \geq \frac{1}{f^2(x) + g^2(x)} \Leftrightarrow$$

$$f^4(x) + g^4(x) + 2f^2(x)g^2(x) \geq f^4(x) + g^4(x) \Leftrightarrow 2f^2(x)g^2(x) \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

- Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f^2(x) + g^2(x)} = +\infty$ η (1) μας δίνει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^4(x) + g^4(x)} = +\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000}$ και $g(x) = \ln x$

- i. Να βρείτε τη σύνθεση της f με την g .
- ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$.
- iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$.

Λύση

- i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (-\infty, +\infty)$, ενώ η g το $D_g = (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση $g(f(x))$ ορίζεται όταν: $A = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} \neq \emptyset$

Είναι:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, +\infty) \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} > 0 \Leftrightarrow (x^4 - 10000) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 > 10000 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4} > 10$$

$$\Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow x < -10 \text{ ή } x > 10$$

$$\text{Οπότε } A = (-\infty, -10) \cup (10, +\infty) \neq \emptyset$$

Επομένως ορίζεται η $g \circ f$ στο A και είναι

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln \left(\frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} \right).$$

- ii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1$. Θέτουμε $u = f(x) = \frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000}$,

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} \right) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

- iii. Ομοίως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1$. Θέτουμε $u = f(x) = \frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000}$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} \right) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

Παρατήρηση: Πιο σύντομα η παραπάνω διαδικασία γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} \right) = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000} \right) \right] = \ln 1 = 0 .$$

Άσκηση 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2010} - \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Ορίζονται τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
- ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

- i. Πρέπει $x^2 - x + 2010 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως το τριώνυμο $x^2 - x + 2010$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2010 < 0$ και επομένως $x^2 - x + 2010 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- ii. Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2010} - \lambda x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2} \right)} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda \right) \right]\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda \right) = 1 - \lambda$ διακρίνουμε

περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Αν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda \right) \right] = +\infty$
- Αν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda \right) \right] = -\infty$

- Αν $1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$, τότε μέσα από την παραπάνω διαδικασία οδηγούμαστε στη μορφή $(+\infty) \cdot 0$ που είναι απροσδιόριστη. Αν όμως θέσουμε $\lambda=1$ στην αρχική μορφή της f , τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2010} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2010}{\sqrt{x^2 - x + 2010} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-1 + \frac{2010}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{2010}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda < 1 \\ -\frac{1}{2}, & \text{αν } \lambda = 1. \\ -\infty, & \text{αν } \lambda > 1 \end{cases}$$

iii. Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2010} - \lambda x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2} \right)} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + \lambda \right) \right]$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + \lambda \right) = 1 + \lambda$$

διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Αν $1+\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + \lambda \right) \right] = +\infty$

- Αν $1+\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + \lambda \right) \right] = -\infty$

- Αν $1+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$, τότε μέσα από την παραπάνω διαδικασία οδηγούμαστε στη μορφή $(+\infty) \cdot 0$ που είναι απροσδιόριστη. Αν όμως θέσουμε $\lambda=-1$ στην αρχική μορφή της f , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2010} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2010 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 2010} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(1 - \frac{2010}{x} \right)}{-x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2010}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2010}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \lambda < -1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } \lambda = -1 \\ +\infty, & \text{αν } \lambda > -1 \end{cases}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 14/ 10/ 2016