

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ - ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ - ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

[Κεφ. 1.6: Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ - Κεφ. 1.7: Όρια Συνάρτησης στο Άπειρο του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 3x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x^5 + 4} - 2\sqrt{x^3 + 1}}$$

Λύση

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)(3 + x)}{(x - 3)^3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(3 + x)}{(x - 3)^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(3 + x)}{(x - 3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[(-x - 3) \cdot \frac{1}{(x - 3)^2} \right] = (-6) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $f(x)$, $g(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις, όταν οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, κάνουμε παραγοντοποίηση, απλοποίηση και βρίσκουμε το όριο της συνάρτησης που προκύπτει.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 3x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(\pi - 3x) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x} \right]$$

Επειδή:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x \right] = 0 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0 \text{ και } \left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sin x \text{ είναι ομόσημοι κοντά στο } \frac{\pi}{2},$$

οπότε $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x > 0$ και επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x} = +\infty,$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 3x) = \pi - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0, \text{ παίρνουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 3x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x} = -\infty$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ (με $\alpha < 0$ ή $\alpha > 0$) και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, με

$g(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 , τότε γράφουμε $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ και εφαρμόζοντας το

δεύτερο θεώρημα (όριο γινομένου), παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty, & \alpha < 0 \\ +\infty, & \alpha > 0 \end{cases}$$

Ανάλογα εργαζόμαστε όταν $g(x) < 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x^5 + 4} - 2\sqrt{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x (\sqrt{x^5 + 4} + 2\sqrt{x^3 + 1})}{(\sqrt{x^5 + 4} - 2\sqrt{x^3 + 1})(\sqrt{x^5 + 4} + 2\sqrt{x^3 + 1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x (\sqrt{x^5 + 4} + 2\sqrt{x^3 + 1})}{(\sqrt{x^5 + 4})^2 - (2\sqrt{x^3 + 1})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x (\sqrt{x^5 + 4} + 2\sqrt{x^3 + 1})}{x^5 + 4 - 4(x^3 + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x (\sqrt{x^5 + 4} + 2\sqrt{x^3 + 1})}{x^3(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x^5 + 4} + 2\sqrt{x^3 + 1})}{(x^2 - 4)} \cdot \frac{1}{x^2} \right] =$$

$$1 \cdot \frac{(\sqrt{4} + 2\sqrt{1})}{-4} \cdot (+\infty) = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)} \pm \sqrt{h(x)}}$, όταν οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία της μορφής

$\frac{0}{0}$, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή και βρίσκουμε το όριο της συνάρτησης που προκύπτει.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+5}{x^3-3x^2+4}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Λύση

- i. Πρέπει $x^3 - 3x^2 + 4 \neq 0$.

Λύνουμε την εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Έχουμε:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x^2-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

ii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{(x-2)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{x+5}{x+1} \right]$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0$ και $(x-2)^2 > 0$ για $x \neq 2$, είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

Είναι επίσης $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x+1} = \frac{7}{3}$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{x+5}{x+1} \right] = +\infty$

iii. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+5}{(x-2)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x+5}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{x+1} \right]$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ και $x+1 > 0$ για $x > -1$, είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$.

Επειδή επιπλέον $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+5}{(x-2)^2} = \frac{4}{9}$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ και $x+1 < 0$ για $x < -1$, είναι $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$.

Επειδή επιπλέον $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+5}{(x-2)^2} = \frac{4}{9}$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.

Παρατηρούμε ότι τα δυο πλευρικά όρια στο -1 είναι διαφορετικά.
Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο -1 .

Μεθοδολογία

Όταν $x \rightarrow x_0^+$, αυτό σημαίνει ότι $x \rightarrow x_0$ και $x > x_0$ ή, ισοδύναμα, $(x - x_0) \rightarrow 0$ και $(x - x_0) > 0$, με συνέπεια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty$.

Ομοίως, όταν $x \rightarrow x_0^-$, αυτό σημαίνει ότι $x \rightarrow x_0$ και $x < x_0$ ή, ισοδύναμα, $(x - x_0) \rightarrow 0$ και $(x - x_0) < 0$, με συνέπεια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty$.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\alpha x^2 + 5\beta x - 6}{x - 3}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 14.$$

i. Να δείξετε ότι για $x \neq 3$ είναι $18\alpha + 15\beta = 6$.

ii. Να βρεθούν οι τιμές των α και β , για $x \neq 3$.

Λύση

i. Για $x \neq 3$, έχουμε $2\alpha x^2 + 5\beta x - 6 = (x - 3) \cdot f(x)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 14$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2\alpha x^2 + 5\beta x - 6) = \lim_{x \rightarrow 3} [(x - 3) \cdot f(x)]$$

$$18\alpha + 15\beta - 6 = 0 \cdot 14$$

$$18\alpha + 15\beta = 6 \quad (1)$$

ii. Για $x \neq 3$ και με δεδομένο ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 14$, η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \frac{2\alpha x^2 + 5\beta x - 18\alpha - 15\beta}{x - 3} = \frac{2\alpha(x^2 - 9) + 5\beta(x - 3)}{x - 3}$$

$$= \frac{2\alpha(x - 3)(x + 3) + 5\beta(x - 3)}{x - 3} = 2\alpha(x + 3) + 5\beta$$

Από την ισότητα $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 14$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 3} [2\alpha(x + 3) + 5\beta] = 14$$

$$12\alpha + 5\beta = 14 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) πρέπει να ισχύουν συγχρόνως. Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 18\alpha + 15\beta = 6 \\ 12\alpha + 5\beta = 14 \end{cases}$$

από τη λύση του οποίου βρίσκουμε $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

Μεθοδολογία

Σε ασκήσεις όπως η παραπάνω, η επίλυση στηρίζεται σε σκέψεις ανάλογες προς τις παρακάτω:

- Ο προσδιορισμός δυο παραμέτρων απαιτεί συνήθως δυο σχέσεις μεταξύ τους, οι οποίες οδηγούν στην επίλυση συστήματος.
- Το δεδομένο ότι το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\alpha x^2 + 5\beta x - 6}{x - 3}$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ το όριο του παρονομαστή είναι μηδέν, μας οδηγεί στη σκέψη ότι και το όριο του αριθμητή πρέπει να είναι μηδέν, γιατί διαφορετικά το όριο δεν θα ήταν πραγματικός αριθμός. Αυτό χρησιμοποιείται στο ερώτημα (i).
- Στο ερώτημα (ii), χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το όριο είναι ίσο με 14, για να βρούμε τη δεύτερη σχέση που συνδέει τα α και β .

Παράδειγμα 4.

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x})$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x})$

Λύση

i. Επειδή $x \rightarrow +\infty$, θεωρούμε ότι $x > 0$, οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x}) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} - x} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{3}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

ii. Επειδή $x \rightarrow -\infty$, θεωρούμε ότι $x < 0$, οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x}) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = -\frac{3}{2}$$

Μεθοδολογία

Όταν η εφαρμογή των θεωρημάτων στα όρια οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή, τότε μετασχηματίζουμε τον τύπο της συνάρτησης και εφαρμόζουμε εκ νέου τα σχετικά θεωρήματα. Ειδικότερα και για την συγκεκριμένη άσκηση:

- Επειδή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$, οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x})$ και για το λόγο αυτό κάνουμε τους παραπάνω μετασχηματισμούς στη μορφή του ορίου.

Ωστόσο, αν για παράδειγμα, είχαμε όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - x})$, τότε αυτό είναι ίσο με $+\infty$ και δεν χρειάζονται οι παραπάνω μετασχηματισμοί. Ομοίως και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$ είναι ίσο με $-\infty$ και δεν χρειαζόμαστε μετασχηματισμό.

- Στην παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των απόλυτων τιμών:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 5.

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) \geq x^3 + x + 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^4 - x + 2017 \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xf(x))$.

Λύση

1) Επειδή $x \in (0, +\infty)$ η σχέση $xf(x) \geq x^3 + x + 1$ γίνεται $f(x) \geq \frac{x^3 + x + 1}{x}$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2) Έστω $x \in (-\infty, 0)$, έτσι η σχέση $x^4 - x + 2017 \leq f(x)$ γίνεται $x^5 - x^2 + 2017x \geq xf(x)$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - x^2 + 2017x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5) = -\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xf(x)) = -\infty$

Μεθοδολογία

Αν αναζητάμε το όριο μιας συνάρτησης κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και έχουμε $f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$), τότε θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

(αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + (\mu - 1)x - \mu}{x^2 + 2x + 1}$$

Λύση

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + (\mu - 1)x - \mu}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 + (\mu - 1)x - \mu}{(x + 1)^2} = (x^2 + (\mu - 1)x - \mu) \cdot \frac{1}{(x + 1)^2}, \quad x \neq -1 \quad (1)$$

Επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + (\mu - 1)x - \mu) = 2 - 2\mu = 2(1 - \mu) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 = 0 \quad \text{με} \quad (x + 1)^2 > 0 \text{ κοντά στο } -1,$$

$$\text{είναι} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = +\infty$$

έχουμε:

- Αν $2(1 - \mu) > 0 \Leftrightarrow \mu < 1$ τότε λόγω της (1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$
- Αν $2(1 - \mu) < 0 \Leftrightarrow \mu > 1$ τότε λόγω της (1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$
- Αν $\mu = 1$ τότε η εύρεση του ορίου από την (1) οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot (+\infty)$. Ωστόσο, για $\mu = 1$ η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2} = (x - 1) \cdot \frac{1}{x + 1}, \quad \text{και επειδή:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x + 1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1} = +\infty, \quad \text{παίρνουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = (-2)(-\infty) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-2)(+\infty) = -\infty.$$

Επειδή λοιπόν τα πλευρικά όρια διαφέρουν, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ για $\mu = 1$.

$$\text{Επομένως} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \mu < 1 \\ -\infty, & \text{αν } \mu > 1 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \text{αν } \mu = 1 \end{cases}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, όταν η $f(x)$ περιέχει παράμετρο μ , αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = h(\mu)$ και

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ τότε εξετάζουμε το πρόσημο της $h(\mu)$ για τις διάφορες τιμές του μ , οπότε:

- Αν $h(\mu) > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
- Αν $h(\mu) < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
- Αν $h(\mu) = 0$, τότε εξετάζουμε τα πλευρικά όρια της $f(x)$ στο x_0 .

Ανάλογα εργαζόμαστε όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} + \sqrt{9x^2 + 7} - 5x - 2$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Λύση

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + \sqrt{9x^2 + 7} - 5x - 2 \right) = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x \right) + \left(\sqrt{9x^2 + 7} - 3x \right) - 2 \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{4x^2 + 2x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x} \right) + \left(\frac{9x^2 + 7 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 7} + 3x} \right) - 2 \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} \right) + \left(\frac{7}{|x| \left(\sqrt{9 + \frac{7}{x^2}} + 3 \right)} \right) - 2 \right] \stackrel{x > 0}{=} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} \right) + \left(\frac{7}{x \left(\sqrt{9 + \frac{7}{x^2}} + 3 \right)} \right) - 2 \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} \right) + \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{7}{\sqrt{9 + \frac{7}{x^2}} + 3} \right) - 2 \right] = \\&= \frac{2+0}{\sqrt{4+0+0}+2} + 0 \cdot \frac{7}{(\sqrt{9+0}+3)} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} - (\gamma x^\mu + \delta)]$, με

$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0, \alpha_\nu > 0$, $g(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_0, \beta_\nu > 0$ όπου

$\gamma x^\mu = \sqrt{\alpha_\nu x^\nu} + \sqrt{\beta_\nu x^\nu}$, εργαζόμαστε ως εξής: κάνουμε “διάσπαση” του όρου γx^μ γράφοντας

$\sqrt{\alpha_\nu x^\mu} + \sqrt{\beta_\nu x^\mu} = \gamma x^\mu$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τις

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{\alpha_\nu x^\mu}$ και $\sqrt{g(x)} - \sqrt{\beta_\nu x^\mu}$ με τις συζυγείς τους παραστάσεις και βρίσκουμε τα όρια της παράστασης που προκύπτει.

Παράδειγμα 3.

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda+1)x^4 + (\lambda^2-1)x^3 - \lambda x + 5}{(1-\lambda)x^3 - x - 1}$$

Λύση

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda+1)x^4 + (\lambda^2-1)x^3 - \lambda x + 5}{(1-\lambda)x^3 - x - 1}$.

- Αν $\lambda+1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$ και $1-\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda+1)x^4}{(1-\lambda)x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\lambda+1}{1-\lambda} \cdot x \right) = \frac{\lambda+1}{1-\lambda} \lim_{x \rightarrow -\infty} x, \quad (1) \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

– Αν $\frac{\lambda+1}{1-\lambda} > 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(1-\lambda) > 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 1$, τότε από (1) έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

– Αν $\frac{\lambda+1}{1-\lambda} < 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(1-\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 1$, τότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

- Αν $\lambda = -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{2x^3-x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

- Αν $\lambda = 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4-x+5}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$.

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda+1)x^4 + (\lambda^2-1)x^3 - \lambda x + 5}{(1-\lambda)x^3 - x - 1} = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } -1 < \lambda < 1 \\ +\infty, & \text{αν } \lambda < -1 \text{ ή } \lambda \geq 1 \\ 0, & \text{αν } \lambda = -1 \end{cases}$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $f(x)$, $g(x)$ παραμετρικές ($\lambda \in \mathbb{R}$), πολυωνυμικές συναρτήσεις, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- 1) Αν οι συντελεστές των όρων με την μεγαλύτερη δύναμη του x είναι διάφοροι του μηδενός, τότε αρκεί να βρούμε το όριο του πηλίκου των όρων αυτών για τις διάφορες τιμές του λ .
- 2) Για τις τιμές του λ που μηδενίζουν τους συντελεστές κάνουμε αντικατάσταση στην αρχική συνάρτηση και βρίσκουμε τα όρια των συναρτήσεων που προκύπτουν.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να δείξετε ότι $f(x) < \log(2x - 2)$, με $x > 1$.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \log(2x - 2))$.

Λύση

α) Πρέπει $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)x^2 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)x^2 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) > 0$

και $x \neq 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$

οπότε:

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

β) Με $x > 1$, έχουμε: $f(x) < \log(2x - 2) \Leftrightarrow \log \frac{x^2 - 1}{x^2} - \log(2x - 2) < 0 \Leftrightarrow \log \frac{x^2 - 1}{x^2(2x - 2)} < 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log \frac{(x - 1)(x + 1)}{2x^2(x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \log \frac{x + 1}{2x^2} < 0 \Leftrightarrow \log \frac{x + 1}{2x^2} < \log 1 \stackrel{\log x \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} \frac{x + 1}{2x^2} < 1 \Leftrightarrow$

$x + 1 < 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 > 0$ που ισχύει (αφού $x > 1$).

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια ανισότητα της μορφής $\log(g(x)) < \log(t(x))$ ισχύει για κάθε τιμή του x που ορίζεται, αρκεί με την βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων να δείξουμε ότι $\log \frac{g(x)}{t(x)} < 0$ και επειδή η συνάρτηση $\log x$ είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξουμε $\frac{g(x)}{t(x)} < 1$.

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \log(2x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{x + 1}{2x^2}$.

Θέτουμε $u = \frac{x + 1}{2x^2} > 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ και επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{x + 1}{2x^2} = \lim_{u \rightarrow 0} (\log u) = -\infty.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(h(x))]$ κατά τα γνωστά, θέτουμε $u = h(x)$, βρίσκουμε το

$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u$ και μετά το $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Παράδειγμα 5.

Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^3 + x + 100}{(\lambda-2)x^2 + 200}$.

Λύση

- Για $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 2$ έχουμε:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^3 + x + 100}{(\lambda-2)x^2 + 200} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^3}{(\lambda-2)x^2} = \frac{\lambda+1}{\lambda-2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

$$\circ \text{ Αν } \frac{\lambda+1}{\lambda-2} > 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-2) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 2, \text{ τότε } L = +\infty$$

$$\circ \text{ Αν } \frac{\lambda+1}{\lambda-2} < 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-2) < 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 2, \text{ τότε } L = -\infty$$

- Για $\lambda = -1$ έχουμε:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+100}{-3x^2+200} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-3x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- Για $\lambda = 2$ έχουμε:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + x + 100}{200} = \frac{1}{200} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + x + 100) = +\infty$$

Μεθοδολογία

Όταν αναζητάμε το όριο μιας ρητής συνάρτησης στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε όπως ξέρουμε αυτό είναι ίσο με το όριο του πηλίκου του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή δια του μεγιστοβάθμιου όρου του παρονομαστή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντιστοίχως.

Όταν οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων περιέχουν μία ή περισσότερες παραμέτρους, τότε, όπως στη συγκεκριμένη περίπτωση, οδηγούμαστε στο να εξετάσουμε το βαθμό των πολωνύμων των όρων της παράστασης, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων.