

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ****ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ**

**[Ενότητες Ορισμός της Συνέχειας - Πράξεις με Συνεχείς Συναρτήσεις - Συνέχεια Συνάρτησης σε Διαστήματα πλην των Βασικών Θεωρημάτων του κεφ.1.8 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου].**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Β****Άσκηση 1.**

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο  $x_0 = 0$  τις συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \frac{|x+e| - |x-e|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases} \quad \beta. g(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}, & x < 0 \\ 1+x^3 \cdot \eta\mu 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Λύση**

**α. Έχουμε:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+e| - |x-e|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(|x+e| - |x-e|) \cdot (|x+e| + |x-e|)}{x \cdot (|x+e| + |x-e|)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+e|^2 - |x-e|^2}{x \cdot (|x+e| + |x-e|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+e)^2 - (x-e)^2}{x \cdot (|x+e| + |x-e|)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe}{x \cdot (|x+e| + |x-e|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e}{|x+e| + |x-e|} = \frac{4e}{|e| + |-e|} = \frac{4e}{2e} = 2$$

$$\bullet f(0) = 2$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**β. Έχουμε:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \eta\mu x \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1) \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \eta \mu x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \eta \mu x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\eta \mu x}{x} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1) \right] = 1 \cdot 2 = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^3 \cdot \eta \mu 2x) = 1 + 0 \cdot 0 = 1.$

- $g(0) = 1 + 0^3 \cdot 0 = 1.$

Επειδή δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , η συνάρτηση  $g$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

## Άσκηση 2.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = \sin x \cdot f(x) - e^x \cdot g(x)$ .

Αν η  $h$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η  $g$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

### Λύση

Αφού η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $x_0$  έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0)$  (1)

Έστω ότι και η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Τότε θα ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (2)

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$h(x) = \sin x \cdot f(x) - e^x \cdot g(x) \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{\sin x \cdot f(x) - h(x)}{e^x} \quad (3)$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x \cdot f(x) - h(x)}{e^x} \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\sin x_0 \cdot f(x_0) - h(x_0)}{e^{x_0}}.$$

Τότε από την (3) έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ , δηλαδή η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$  που είναι άτοπο.

Άρα η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

## ΘΕΜΑ Γ

### Άσκηση 1.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \beta + \frac{2\alpha x^2 - 2\alpha\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}, & 0 \leq x < 1 \\ \beta\sqrt{8+x} + 4\alpha x + 3, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } x_0 = 1.$$

### Λύση

Έστω ότι υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

Τότε θα έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ . (1)

Είναι:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \beta + \frac{2\alpha x^2 - 2\alpha\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \beta + 2\alpha \cdot \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \beta + 2\alpha \cdot \frac{(x^2 - \sqrt{x})(x^2 + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x^2 + \sqrt{x})} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \beta + 2\alpha \cdot \frac{(x^4 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x^2 + \sqrt{x})} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \beta + 2\alpha \cdot \frac{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x^2 + \sqrt{x})} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \beta + 2\alpha \cdot \frac{x(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x^2 + \sqrt{x}} \right] = \beta + 2\alpha \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \beta + 6\alpha.$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\beta\sqrt{8+x} + 4\alpha x + 3) = 3\beta + 4\alpha + 3.$$

$$\bullet \quad f(1) = \beta\sqrt{8+1} + 4\alpha \cdot 1 + 3 = 3\beta + 4\alpha + 3.$$

Τότε από την (1) θα έχουμε:

$3\beta + 4\alpha + 3 = \beta + 6\alpha \Leftrightarrow 2\beta - 2\alpha = -3 \Leftrightarrow 2(\beta - \alpha) = -3$  που είναι άτοπο διότι το  $2(\beta - \alpha)$  είναι άρτιος (αφού οι  $\alpha, \beta$  είναι ακέραιοι) ενώ το  $-3$  είναι περιττός.

Συνεπώς δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

## Άσκηση 2.

$$\text{Δίνεται η συνεχής συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot e^{\frac{1}{x}} + 2}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, & x \neq 0 \\ \beta + 1, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

### Λύση

Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ .

Επειδή η  $f$ , ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , είναι και συνεχής στο  $x_0 = 0$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0). \quad (1)$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha \cdot e^{\frac{1}{x}} + 2}{e^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

Θέτουμε  $\frac{1}{x} = u$ . Τότε αν  $x \rightarrow 0^-$  έχουμε  $u \rightarrow -\infty$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\alpha \cdot e^u + 2}{e^u + 1} = \frac{\alpha \cdot 0 + 2}{0 + 1} = 2, \text{ διότι } \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \cdot e^{\frac{1}{x}} + 2}{e^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

Θέτουμε  $\frac{1}{x} = u$ . Τότε αν  $x \rightarrow 0^+$  έχουμε  $u \rightarrow +\infty$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \cdot e^u + 2}{e^u + 1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u \left( \alpha + \frac{2}{e^u} \right)}{e^u \left( 1 + \frac{1}{e^u} \right)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha + \frac{2}{e^u}}{1 + \frac{1}{e^u}} = \frac{\alpha + 0}{1 + 0} = \alpha, \text{ διότι } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^u} = 0$$

αφού  $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$ .

$$\bullet f(0) = \beta + 1.$$

$$\text{Επομένως από την (1) έχουμε: } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}.$$

### Άσκηση 3.

Έστω η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1,5)$  και είναι τέτοια ώστε:  $(x-1)f(x) = \kappa x^2 + \lambda x - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τους  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  και τον τύπο της  $f(x)$ .

#### Λύση

Επειδή η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1,5)$ , έχουμε:  $f(1) = 5$ .

Επειδή η  $f$ , ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , είναι συνεχής και στο  $x_0 = 1$ , έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 5$ .

Τότε από τη σχέση  $(x-1)f(x) = \kappa x^2 + \lambda x - 2$ , βρίσκουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (\kappa x^2 + \lambda x - 2) \text{ οπότε: } 0 \cdot 5 = \kappa + \lambda - 2 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 2 \quad (1)$$

Για κάθε  $x \neq 1$  έχουμε:

$$(x-1)f(x) = \kappa x^2 + \lambda x - 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\kappa x^2 + \lambda x - 2}{x-1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) = \frac{\kappa x^2 + \lambda x - (\kappa + \lambda)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\kappa(x^2 - 1) + \lambda(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\kappa(x-1)(x+1) + \lambda(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \kappa(x+1) + \lambda.$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [\kappa(x+1) + \lambda] = 5 \text{ οπότε } 2\kappa + \lambda = 5. \quad (2)$$

Από το σύστημα των (1) και (2) προκύπτει:  $\kappa = 3$  και  $\lambda = -1$ .

Για τις τιμές αυτές των  $\kappa$  και  $\lambda$  έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \kappa(x+1) + \lambda, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 3(x+1) - 1, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = 3x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

#### Άσκηση 4.

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο σημείο  $x_1 = 0$  και τέτοια ώστε:

$$f(x + ky) = \sin ky \cdot f(x) + \sin x \cdot f(ky) + kxy \quad (*) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } k \in \mathbb{R}^*$$

α. Να βρείτε την τιμή  $f(0)$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

#### Λύση

α. Για  $x = y = 0$  από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$f(0) = 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(0) + 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

β. Αφού η  $f$  είναι συνεχής  $x_1 = 0$ , έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \quad (1)$

Έστω τυχαίο  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , δηλαδή ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Θέτουμε  $x = x_0 + kh$ . Όταν  $x \rightarrow x_0$  έχουμε  $h \rightarrow 0$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{x = x_0 + kh}{=} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + kh) \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} [\sin kh \cdot f(x_0) + \sin x_0 \cdot f(kh) + kx_0 h] =$$

$$1 \cdot f(x_0) + \sin x_0 \cdot 0 + kx_0 \cdot 0 = f(x_0)$$

(Για το  $\lim_{h \rightarrow 0} f(kh)$  θέτουμε  $kh = u$  οπότε αν  $h \rightarrow 0$  έχουμε και  $u \rightarrow 0$ , οπότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(kh) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) \stackrel{(1)}{=} 0.)$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , συμπεραίνουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

### Άσκηση 5.

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο σημείο  $x_1 = 0$  με  $f(0) = 0$  και τέτοια ώστε:  $f(x) \leq f(x+y-1) \leq f(x) - f(y-1)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

#### Λύση

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_1 = 0$  με  $f(0) = 0$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \quad (1)$$

Έστω τυχαίο  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , δηλαδή ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Θέτουμε  $x = x_0 + h - 1$ . Όταν  $x \rightarrow x_0$  έχουμε  $h \rightarrow 1$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{x=x_0+h-1}{=} \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 + h - 1). \quad (2)$$

Από τη σχέση που δίνεται, για  $x = x_0$  και  $y = h$  έχουμε:

$$f(x_0) \leq f(x_0 + h - 1) \leq f(x_0) - f(h - 1).$$

Επειδή:  $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0) = f(x_0)$  και

$$\lim_{h \rightarrow 1} [f(x_0) - f(h - 1)] \stackrel{h-1=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} [f(x_0) - f(u)] \stackrel{(1)}{=} f(x_0) - 0 = f(x_0),$$

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 + h - 1) = f(x_0), \text{ οπότε από την (2) έχουμε: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

### Άσκηση 6.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο σημείο  $x_1 = 1$  και τέτοια ώστε:

$$f(x \cdot y) = x \cdot f(y) + y \cdot f(x) - xy \quad (*) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*.$$

α. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}^*$ .

### Λύση

α. Για  $x = y = 1$  από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$f(1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) - 1 \cdot 1 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_1 = 1$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad (1)$$

β. Έστω τυχαίο  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ .

Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , δηλαδή ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Θέτουμε  $x = x_0 \cdot h$ . Όταν  $x \rightarrow x_0$  έχουμε  $h \rightarrow 1$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{x=x_0h}{=} \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 1} [x_0 \cdot f(h) + h \cdot f(x_0) - x_0 h] \stackrel{(1)}{=}$$

$$x_0 \cdot 1 + 1 \cdot f(x_0) - x_0 \cdot 1 = f(x_0).$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}^*$ .

### Άσκηση 7.

Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$  και ότι  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{x+6}}{x-3} = \alpha$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(3,3)$ .

β. Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha \in \mathbb{R}$  αν  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) - 2| - 1}{x - 3} = 1$ .

### Λύση

α. Θέτουμε  $g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{x+6}}{x-3}$  οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) = (x-3)g(x) + \sqrt{x+6}. \quad (1)$$

Παίρνοντας τα όρια στην τελευταία σχέση έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} [(x-3)g(x) + \sqrt{x+6}] = 0 \cdot \alpha + 3 = 3.$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ , έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 3$ .

Επομένως η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(3,3)$ .

β. Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - 2] = 3 - 2 = 1 > 0$ , συμπεραίνουμε ότι  $f(x) - 2 > 0$  κοντά στο 3.

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) - 2| - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{[f(x) - 2] - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3}{x - 3} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)g(x) + \sqrt{x+6} - 3}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)g(x) + \sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[ g(x) + \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[ g(x) + \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \left[ g(x) + \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[ g(x) + \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3} \right] = \alpha + \frac{1}{6}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) - 2| - 1}{x - 3} = 1, \text{ έχουμε: } \alpha + \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{6}.$$

### Άσκηση 8.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $x_0$  και τέτοια ώστε:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{\eta\mu 2h} = \alpha$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

β. Να βρείτε τον  $\alpha \in \mathbb{R}$  αν  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 6$ .

### Λύση

α. Θέτουμε  $g(h) = \frac{f(x_0 + h)}{\eta\mu 2h}$  οπότε  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = \alpha \in \mathbb{R}$  και  $f(x_0 + h) = \eta\mu 2h \cdot g(h)$ . (1)

Για να βρούμε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  θέτουμε  $x = x_0 + h$ .

Τότε αν  $x \rightarrow x_0$  έχουμε  $h \rightarrow 0$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{x=x_0+h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} [\eta\mu 2h \cdot g(h)] = 0 \cdot \alpha = 0$$

β. Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , έχουμε:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Τότε: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2h \cdot g(h)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu 2h}{h} \cdot g(h) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ 2 \cdot \frac{\eta\mu 2h}{2h} \cdot g(h) \right] = 2 \cdot 1 \cdot \alpha = 2\alpha.$$

(Για το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2h}{2h}$  θέτουμε  $2h = u$  οπότε αν  $h \rightarrow 0$  έχουμε και  $u \rightarrow 0$ , οπότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2h}{2h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1)$$

Επειδή  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 6$ , έχουμε:  $2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$ .

### Άσκηση 9.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $f^2(x) + 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

#### Λύση

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f^2(x) + 2f(x) + \sin^2 x \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + 1 - \eta\mu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x) + 1]^2 \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x) + 1| \leq |\eta\mu x| \Leftrightarrow -|\eta\mu x| \leq f(x) + 1 \leq |\eta\mu x| \Leftrightarrow$$

$$-1 - |\eta\mu x| \leq f(x) \leq -1 + |\eta\mu x|. \quad (1)$$

Από την (1) για  $x = 0$  έχουμε:  $-1 \leq f(0) \leq -1$ , συνεπώς  $f(0) = -1$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1 - |\eta\mu x|) = -1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1 + |\eta\mu x|) = -1$ , σύμφωνα με το κριτήριο

παρεμβολής έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

### Άσκηση 10.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , έτσι ώστε:

$$|f(x) - g(x)| \leq [g(x) \cdot \ln x]^2 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Αν η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , να αποδείξετε ότι και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

#### Λύση

Επειδή η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ . (1)

Για κάθε  $x > 0$  έχουμε:

$$|f(x) - g(x)| \leq [g(x) \cdot \ln x]^2 \Leftrightarrow$$

$$-[g(x) \cdot \ln x]^2 \leq f(x) - g(x) \leq [g(x) \cdot \ln x]^2 \Leftrightarrow$$

$$g(x) - [g(x) \cdot \ln x]^2 \leq f(x) \leq g(x) + [g(x) \cdot \ln x]^2 \quad (2)$$

- Από την (2) για  $x = 1$  έχουμε:

$$g(1) - [g(1) \cdot 0]^2 \leq f(1) \leq g(1) + [g(1) \cdot 0]^2 \Leftrightarrow g(1) \leq f(1) \leq g(1),$$

$$\text{οπότε } f(1) = g(1) \quad (3)$$

- Επειδή:  $\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) - [g(x) \cdot \ln x]^2) \stackrel{(1)}{=} g(1) - [g(1) \cdot 0]^2 = g(1)$  και

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + [g(x) \cdot \ln x]^2) \stackrel{(1)}{=} g(1) + [g(1) \cdot 0]^2 = g(1),$$

$$\text{σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = g(1). \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  που σημαίνει ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

### Άσκηση 11.

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 18$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ .

β. Θεωρούμε την συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ \alpha - 3, & x = 3 \end{cases}$

Βρείτε τον  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $g$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ .

### Λύση

α. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:  $6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 18$  (1)

- Από την (1) για  $x = 3$  έχουμε:

$$18 - 9 \leq f(3) \leq 9 - 18 + 18 \Leftrightarrow 9 \leq f(3) \leq 9, \text{ συνεπώς: } f(3) = 9.$$

- Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 3} (6x - x^2) = 9$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 18) = 9$ , σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής από την (1) έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$ .

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ , συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ .

β. Για κάθε  $x \neq 3$  από την (1) έχουμε:

$$6x - x^2 - 9 \leq f(x) - 9 \leq x^2 - 6x + 18 - 9 \Leftrightarrow$$

$$-(x^2 - 6x + 9) \leq f(x) - 9 \leq (x^2 - 6x + 9) \Leftrightarrow$$

$$-(x-3)^2 \leq f(x) - 9 \leq (x-3)^2 \quad (2)$$

- Από την (2) για κάθε  $x > 3$  έχουμε:

$$-\frac{(x-3)^2}{x-3} \leq \frac{f(x)-9}{x-3} \leq \frac{(x-3)^2}{x-3} \Leftrightarrow -(x-3) \leq \frac{f(x)-9}{x-3} \leq (x-3)$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, επειδή  $\lim_{x \rightarrow 3^+} [-(x-3)] = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0$ ,

έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)-9}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 0.$

- Από την (2) για κάθε  $x < 3$  έχουμε:

$$-\frac{(x-3)^2}{x-3} \geq \frac{f(x)-9}{x-3} \geq \frac{(x-3)^2}{x-3} \Leftrightarrow -(x-3) \geq \frac{f(x)-9}{x-3} \geq (x-3)$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, επειδή  $\lim_{x \rightarrow 3^-} [-(x-3)] = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0,$

έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-9}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 0.$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 0,$  έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0.$

Αφού η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$  θα ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$

Οπότε:  $0 = \alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha = 3.$

### Άσκηση 12.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}\alpha^2 f^2(6-x^2) - (\beta^2 + 1)x + 2, & x > 2 \end{cases}$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  μεταβάλλονται, να βρεθεί η καμπύλη στη οποία βρίσκονται τα σημεία  $M(\alpha, \beta)$ .

#### Λύση

Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η  $f$  είναι συνεχής και στο  $x_0 = 2$ .

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{2}\alpha^2 f^2(6-x^2) - (\beta^2 + 1)x + 2 \right) \quad (1).$

Επειδή η συνάρτηση  $f^2(6-x^2)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως σύνθεση των συνεχών στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεων  $f_1(x) = f^2(x)$  και  $f_2(x) = 6-x^2$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^2(6-x^2) = f^2(6-2^2) = f^2(2).$$

Άρα από την (1) προκύπτει:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}\alpha^2 f^2(2) - (\beta^2 + 1) \cdot 2 + 2, \quad (2).$

$$f(2) = 2 \quad (3)$$

Η (2), λόγω της (3), γίνεται:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}\alpha^2 \cdot 4 - (\beta^2 + 1) \cdot 2 + 2 = 2\alpha^2 - 2\beta^2.$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$  έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$

Άρα:

$$2\alpha^2 - 2\beta^2 = 2 \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 1.$$

Τα σημεία  $M(\alpha, \beta)$  βρίσκονται στη καμπύλη  $x^2 - y^2 = 1$  (ισοσκελής υπερβολή).

## ΘΕΜΑ Δ

### Άσκηση 1.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $f^3(x) + f(x) = x^2 + \eta\mu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι:

α.  $|f(x)| \leq x^2 + |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β. Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

### Λύση

α. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x^2 + \eta\mu x \Leftrightarrow f(x)[f^2(x) + 1] = x^2 + \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2 + \eta\mu x}{f^2(x) + 1} \text{ αφού } f^2(x) + 1 \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$|f(x)| = \left| \frac{x^2 + \eta\mu x}{f^2(x) + 1} \right| = \frac{|x^2 + \eta\mu x|}{f^2(x) + 1} \leq \frac{|x^2 + \eta\mu x|}{0 + 1} = |x^2 + \eta\mu x| \leq |x^2| + |\eta\mu x| = x^2 + |\eta\mu x| \leq x^2 + |x|$$

διότι  $f^2(x) \geq 0$  και  $|\eta\mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα:  $|f(x)| \leq x^2 + |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:  $|f(x)| \leq x^2 + |x| \Leftrightarrow -x^2 - |x| \leq f(x) \leq x^2 + |x|$  (1)

- Από την (1) για  $x = 0$  έχουμε:  $0 \leq f(0) \leq 0$ , συνεπώς:  $f(0) = 0$ .
- Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 - |x|) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + |x|) = 0$ , σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

## Άσκηση 2.

Έστω συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 2$  τέτοια ώστε:

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \right| \leq \left| (x+1) \left( \frac{1}{x} - \eta\mu \frac{1}{x} \right) \right| \text{ για κάθε } x > 0.$$

α. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right]$ .

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

### Λύση

α. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] \quad (1)$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + 0 = 1.$$

Για να βρούμε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$  θέτουμε  $\frac{1}{x} = u$ . Όταν  $x \rightarrow +\infty$  έχουμε  $u \rightarrow 0$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] = 1 \cdot 1 = 1.$$

β. Επειδή η συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο  $[0, +\infty)$ , για να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ .

Για κάθε  $x > 0$  έχουμε:

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \right| \leq \left| (x+1) \left( \frac{1}{x} - \eta\mu \frac{1}{x} \right) \right| \Leftrightarrow$$

$$-\left|(x+1)\left(\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\right)\right|\leq f\left(\frac{1}{x}\right)-2\leq\left|(x+1)\left(\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\right)\right|\Leftrightarrow$$

$$2-\left|1+\frac{1}{x}-(x+1)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq f\left(\frac{1}{x}\right)\leq 2+\left|1+\frac{1}{x}-(x+1)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|$$

Επειδή:

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}\left(2-\left|1+\frac{1}{x}-(x+1)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|\right)^{(\alpha)}=2-|1+0-1|=2 \text{ και}$$

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}\left(2+\left|1+\frac{1}{x}-(x+1)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|\right)^{(\alpha)}=2+|1+0-1|=2 ,$$

$$\text{σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: } \lim_{x\rightarrow+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=2. \quad (1)$$

Βρίσκουμε το  $\lim_{x\rightarrow 0^+} f(x)$ .

Στο  $\lim_{x\rightarrow+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$  θέτουμε  $\frac{1}{x}=u$ . Όταν  $x\rightarrow+\infty$  έχουμε  $u\rightarrow 0^+$ , οπότε:

$$\lim_{x\rightarrow+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\rightarrow 0^+} f(u)\stackrel{(1)}{=}2, \text{ δηλαδή } \lim_{x\rightarrow 0^+} f(x)=2.$$

Επειδή  $\lim_{x\rightarrow 0^+} f(x)=f(0)$ , η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0=0$ .

Ημερομηνία τροποποίησης: 09/07/2018