

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**  
**ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO - ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ**  
**ΤΙΜΩΝ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ - ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ**  
**ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

[Ενότητα Βασικά Θεωρήματα του κεφ.1.8 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Β**

**Άσκηση 1.**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$  με  $x > 2$ . Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[0,1]$ .

Λύση

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι προφανώς το  $(2, +\infty)$  στο οποίο η  $f$  είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Το  $[0,1]$  όμως δεν είναι υποσύνολο του  $(2, +\infty)$  οπότε δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια σε αυτό ή για ισχύ των προϋποθέσεων του θεωρήματος Bolzano.

## Άσκηση 2.

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x-1=3\eta\mu x$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα  $[-\pi, 0]$ .

### Λύση

Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:  $x-1=3\eta\mu x \Leftrightarrow 3\eta\mu x - x + 1 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu x - x + 1$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και συνεχή σε αυτό ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων  $3\eta\mu x$  και  $-x+1$ .

Άρα θα είναι συνεχής και στο  $[-\pi, 0]$ .

Διαχωρίζουμε το δοθέν διάστημα στα υποδιαστήματα  $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ ,  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  και παρατηρούμε ότι

$$f(-\pi) = 3\eta\mu(-\pi) + \pi + 1 = 0 + \pi + 1 > 0$$

$$f(-\frac{\pi}{2}) = 3\eta\mu(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} + 1 = -3 + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi-4}{2} < 0$$

$$f(0) = 3\eta\mu 0 - 0 + 1 = 1 > 0$$

- Για το διάστημα  $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$  έχουμε  $f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(-\pi) < 0$ . Συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$  άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ .
- Επίσης για το διάστημα  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  έχουμε  $f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(0) < 0$ . Συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ , άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Με αυτό τον τρόπο αποδείξαμε την ύπαρξη τουλάχιστον 2 ριζών της εξίσωσης  $x-1=3\eta\mu x$  στο διάστημα  $[-\pi, 0]$ .

### Μεθοδολογία

Διαχωρίζουμε κατάλληλα το δοθέν διάστημα σε δύο επιμέρους υποδιαστήματα (με δοκιμές) και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano σε καθένα απ' αυτά.

### Άσκηση 3.

Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

#### Λύση

- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, \pi]$  ως διαφορά συνεχών.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0$  ή  $2\eta\mu x - 1 = 0$ .

Είναι:  $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ .

Επειδή  $x \in [0, \pi]$ , έχουμε:  $x = \frac{\pi}{2}$ .

$2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$  ή  $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$ .

Επειδή  $x \in [0, \pi]$ , έχουμε:  $x = \frac{\pi}{6}$  ή  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

- Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του πρόσημου της  $f$ .

| Διάστημα                  | $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ | $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ | $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ |
|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------|
| Επιλεγμένος αριθμός $x_0$ | 0                               | $\frac{\pi}{3}$                             | $\frac{2\pi}{3}$                             | $\pi$                              |
| $f(x_0)$                  | -1                              | $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$                   | $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$                   | 1                                  |
| Πρόσημο                   | -                               | +                                           | -                                            | +                                  |

#### Άσκηση 4.

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{1}{2^x} = \ln x$ , έχει μοναδική ρίζα.

#### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{2^x} - \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Η  $f$  είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα διότι: για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , με

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{2^{x_1}} > \frac{1}{2^{x_2}}$  και  $\ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$ . Με πρόσθεση κατά μέλη

έχουμε  $\frac{1}{2^{x_1}} - \ln x_1 > \frac{1}{2^{x_2}} - \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2^x} - \ln x \right) = +\infty$  γιατί  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2^x} \right) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^x} - \ln x \right) = -\infty$  γιατί  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ . Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών, άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Αυτή η ρίζα είναι μοναδική αφού η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1.

### Άσκηση 5.

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 2]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[2, +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  και  $f(2) = 0$ , τότε:

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

### Λύση

α) Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 2]$ , το σύνολο τιμών της σ' αυτό θα είναι το διάστημα  $\Delta_1 = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(2) \right] = (-\infty, 0]$ .

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $[2, +\infty)$ , το σύνολο τιμών της σ' αυτό θα είναι το διάστημα  $\Delta_2 = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2) \right] = (-\infty, 0]$ .

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = (-\infty, 0]$ .

β) Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = 2$ , στο διάστημα  $(-\infty, 2]$ , αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 2]$  και  $f(2) = 0$ .

Επίσης, η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = 2$ , στο διάστημα  $[2, +\infty)$ , αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[2, +\infty)$  και  $f(2) = 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα την  $x = 2$ .

### Άσκηση 6.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[1, 5]$ , τέτοια ώστε  $f^2(1) + f^2(5) = 6f(1) - 2f(5) - 10$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 5)$  ώστε  $2f(x_0) = x_0$ .

### Λύση

Έχουμε:  $f^2(1) + f^2(5) = 6f(1) - 2f(5) - 10 \Leftrightarrow f^2(1) + f^2(5) - 6f(1) + 2f(5) + 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$$[f(1) - 3]^2 + [f(5) + 1]^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 3 \text{ και } f(5) = -1.$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 5)$  ώστε  $2f(x_0) - x_0 = 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = 2f(x) - x$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[1, 5]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[1, 5]$  αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 5]$ .
- $g(1) \cdot g(5) = [2f(1) - 1] \cdot [2f(5) - 5] = (2 \cdot 3 - 1) \cdot [2 \cdot (-1) - 5] = 5 \cdot (-7) < 0$

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 5)$  ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) = x_0$

### Άσκηση 7.

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^{-x} = x - 2$ , έχει μοναδική θετική ρίζα.

#### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = e^{-x} - x + 2$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Είναι γνησίως φθίνουσα διότι : για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , με  $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$  και  $-x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 2 > -x_2 + 2$ .

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε  $e^{-x_1} - x_1 + 2 > e^{-x_2} - x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - x + 2) = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - x + 2) = -\infty. \text{ Αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -\infty$$

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, 3)$ . Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών, άρα υπάρχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Αυτή η ρίζα είναι μοναδική αφού η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1.

## ΘΕΜΑ Γ

### Άσκηση 1.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $3^x + 2x + 1 = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(-1, 2)$ .

#### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 3^x + 2x + 1$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και συνεχή σε αυτό ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων  $3^x$  και  $2x + 1$ . Άρα θα είναι συνεχής και στο  $[-1, 2]$ . Παρατηρούμε ότι

$$f(-1) = \frac{1}{3} - 2 + 1 = -\frac{2}{3} < 0 \text{ και } f(2) = 9 + 4 + 1 = 14 > 0. \text{ Άρα ισχύει } f(2) \cdot f(-1) < 0.$$

Συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[-1, 2]$ . Οπότε προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $f(x) = 3^x + 2x + 1$  στο  $(-1, 2)$ . Θα αποδείξουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(-1, 2)$ .

Γνωρίζουμε ότι η  $3^x$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Ομοίως και η  $2x + 1$ . Άρα και η  $f(x) = 3^x + 2x + 1$  θα είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως άθροισμα γνησίως αυξουσών συναρτήσεων. Συνεπώς θα είναι 1-1. Κατ' επέκταση η συνάρτηση θα έχει ακριβώς μία ρίζα.



## Άσκηση 2.

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και συνεχής στο  $[0,5]$  με  $f(1)+f(2)+f(3)=0$  (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $[0,5]$ .

Λύση (2 τρόποι λύσης)

A' Τρόπος:

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι

- $f(1)=f(2)=f(3)=0$  ή
- 2 από τους προσθετέους είναι ετερόσημοι.
  - i) Έστω ότι είναι  $f(1) \cdot f(2) < 0$  και επειδή η  $f$  συνεχής στο  $[1,2] \subseteq [0,5]$  εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano . Άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1,2)$  ώστε  $f(\xi)=0$  δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $f(x)=0$  στο  $(1,2)$  .
  - ii) Αν  $f(1) \cdot f(3) < 0$  με όμοιο τρόπο θα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $f(x)=0$  στο  $(1,3)$  .
  - iii) Αν  $f(2) \cdot f(3) < 0$  με όμοιο τρόπο θα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $f(x)=0$  στο  $(2,3)$  .

Άρα σε οποιαδήποτε περίπτωση θα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $f$  στο  $[0,5]$ .

B' Τρόπος:

Έστω ότι δεν έχει καμία ρίζα, δηλαδή  $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$  ή  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [0,5]$ .  
Άρα  $f(1)+f(2)+f(3) > 0$  ή  $f(1)+f(2)+f(3) < 0$  που είναι άτοπο.

Μεθοδολογία

1. Έχουμε 2 περιπτώσεις:

- Οι ρίζες είναι τα  $x_1, x_2, x_3$  ή
- Κατασκευάζουμε τρία διαστήματα με τα  $x_1, x_2, x_3$  και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano σε καθένα από αυτά.

2. Εφαρμόζουμε την εις άτοπο απαγωγή.

### Άσκηση 3.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda^2 + 10, & x \leq \kappa \\ -(2x + 6\lambda)e^{x-\kappa}, & x > \kappa \end{cases}$ , με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο ώστε:  $\xi^3 + (\kappa - \lambda)\xi + \kappa e^\xi = 0$

#### Λύση

Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η  $f$  είναι συνεχής και στο  $x_0 = \kappa$ .

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow \kappa^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \kappa^+} f(x) = f(\kappa)$
- $\lim_{x \rightarrow \kappa^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \kappa^-} (x^2 + \lambda^2 + 10) = \kappa^2 + \lambda^2 + 10 = f(\kappa) \quad (1)$
- $\lim_{x \rightarrow \kappa^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \kappa^+} (-(2x + 6\lambda)e^{x-\kappa}) = -(2\kappa + 6\lambda)e^0 = -2\kappa - 6\lambda \quad (2).$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\kappa^2 + \lambda^2 + 10 = -2\kappa - 6\lambda \Rightarrow \kappa^2 + \lambda^2 + 1 + 2\kappa + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\kappa + 1)^2 + (\lambda + 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa = -1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε πλέον ότι υπάρχει  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο ώστε:  $\xi^3 + 2\xi - e^\xi = 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x^3 + 2x - e^x$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[0,1]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως διαφορά συνεχών.
- $g(0)g(1) = (-1)(3 - e) = e - 3 < 0$

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (0,1)$ :  $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^3 + 2\xi - e^\xi = 0$ .

#### Άσκηση 4.

Έστω συνάρτηση  $f$  η οποία είναι περιττή και συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(\sin x)] = 2$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  ώστε  $f(x_0) = 1$ .

#### Λύση

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  ώστε  $f(x_0) - 1 = 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 1$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[0,1]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  διότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- $g(0) \cdot g(1) = [f(0) - 1] \cdot [f(1) - 1]$  (1)

Επειδή η  $f$  είναι περιττή στο  $\mathbb{R}$ , έχουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $-x \in \mathbb{R}$  και

$$f(-x) = -f(x).$$

Για  $x = 0$  βρίσκουμε:  $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ . (2)

Επειδή η συνάρτηση  $f(\sin x)$  είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(\sin x)] = 2 \Leftrightarrow f(1) = 2. \quad (3)$$

Από την (1) λόγω των (2) και (3) έχουμε:  $g(0) \cdot g(1) = (0 - 1) \cdot (2 - 1) = -1 < 0$ .

Συνεπώς υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1$ .

### Άσκηση 5.

Έστω συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη και περιττή στο  $\mathbb{R}$  με  $f(5) = 7$ .

Αν η εξίσωση  $f(x) = 6$  είναι αδύνατη να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

#### Λύση

Επειδή η  $f$  είναι περιττή στο  $\mathbb{R}$ , έχουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $-x \in \mathbb{R}$  και  $f(-x) = -f(x)$ .

Για  $x = 0$  βρίσκουμε:  $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ .

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 6$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[0, 5]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 5]$  διότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- $g(0) \cdot g(5) = [f(0) - 6] \cdot [f(5) - 6] = (0 - 6)(7 - 6) = -6 < 0$ .

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 5)$  ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 6 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 6$  που είναι άτοπο διότι η εξίσωση  $f(x) = 6$  είναι αδύνατη.

Άρα η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

### Άσκηση 6.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in [0,1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = x_0 \cdot e^{x_0}$

2. Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta\mu^2 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 1$ .

3. Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 3x}{x^2 + \eta\mu 2x} = 1$ .

### Λύση

1. Αφού η σχέση ισχύει  $x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θέτοντας  $x = 0$  και  $x = 1$  παίρνουμε:

$$0^2 \leq f(0) \leq 0^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 1 \text{ και } 1^2 \leq f(1) \leq 1^2 + 1 \Rightarrow 1 \leq f(1) \leq 2 \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - xe^x$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και  $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ ,  $g(1) = f(1) - e \leq 2 - e < 0$  (από τις (1)), δηλαδή  $g(0)g(1) \leq 0$ .

- Αν  $g(0)g(1) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$ , που σημαίνει ότι το 0 είναι ρίζα της  $g(x) = 0$ .
- Αν  $g(0)g(1) < 0$ , από το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $g(x_0) = 0$ .
- Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in [0,1)$  τέτοιο ώστε  $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0 \cdot e^{x_0}$

2. Στη σχέση:  $x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 1$  θέτουμε όπου  $x$  το  $1/x$  με προϋπόθεση ότι  $x \neq 0$  και

$$\text{Βρίσκουμε: } \frac{1}{x^2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \leq \eta\mu^2 x f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + \eta\mu^2 x.$$

Όμως  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + \eta\mu^2 x) = 1 + 0 = 1$ , οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής

$$\text{θα έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu^2 x f\left(\frac{1}{x}\right)) = 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + 3x}{x^2 + \eta\mu 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \left[ \eta\mu^2 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{\eta\mu x} \right]}{x(x + 2 \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x})} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{\eta\mu x}}{x + 2 \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x}} =$$

$$1 \cdot \frac{1 + \frac{3}{1}}{0 + 2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

(\*) εφαρμόζουμε την ιδιότητα του γινομένου των ορίων, γιατί υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων

### Άσκηση 7.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[0,1]$ , τέτοια ώστε  $0 \leq f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in [0,1]$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in [0,1)$  ώστε  $f^2(x_0) + x_0 e^{x_0} = f(x_0)$ .

#### Λύση

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in [0,1)$  ώστε  $f^2(x_0) - f(x_0) + x_0 e^{x_0} = 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f^2(x) - f(x) + x e^x$ .

Έχουμε:

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  διότι προκύπτει από πράξεις συνεχών στο  $[0,1]$ .
- $g(0) = f^2(0) - f(0) = f(0) \cdot [f(0) - 1] \leq 0$  διότι  $0 \leq f(0) \leq 1$  όπως προκύπτει από την εκφώνηση.

$g(1) = f^2(1) - f(1) + e < 0$  διότι αν θέσουμε  $f(x) = y$ , το τριώνυμο  $y^2 - y + e$  είναι πάντοτε θετικό αφού έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot e = 1 - 4e < 0.$$

Άρα ισχύει ότι:  $g(0) \cdot g(1) \leq 0$ .

— Αν  $g(0) \cdot g(1) < 0$ , τότε, σύμφωνα με το Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

— Αν  $g(0) \cdot g(1) = 0 \stackrel{g(1) \neq 0}{\Leftrightarrow} g(0) = 0$ , τότε το  $x_0 = 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $g(x) = 0$ .

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in [0,1)$  ώστε να ισχύει:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) - f(x_0) + x_0 e^{x_0} = 0$$

### Άσκηση 8.

Αν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100} \in [0,1]$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in [0,1]$  ώστε:

$$|\xi - \alpha_1| + |\xi - \alpha_2| + \dots + |\xi - \alpha_{100}| = 50.$$

### Λύση

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in [0,1]$  ώστε:

$$|\xi - \alpha_1| + |\xi - \alpha_2| + \dots + |\xi - \alpha_{100}| - 50 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + \dots + |x - \alpha_{100}| - 50$ .

Έχουμε:

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως άθροισμα απολύτων συνεχών συναρτήσεων

- $f(0) = |-\alpha_1| + |-\alpha_2| + \dots + |-\alpha_{100}| - 50 =$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{100}) - 50, \text{ διότι οι } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100} \text{ είναι μη αρνητικοί.}$$

$$f(1) = |1 - \alpha_1| + |1 - \alpha_2| + \dots + |1 - \alpha_{100}| - 50 = (1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2) + \dots + (1 - \alpha_{100}) - 50 =$$

$$50 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{100}), \text{ διότι } 1 - \alpha_1 \geq 0, 1 - \alpha_2 \geq 0, \dots, 1 - \alpha_{100} \geq 0.$$

$$\text{Άρα: } f(0) \cdot f(1) = [(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{100}) - 50] \cdot [50 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{100})] =$$

$$-[(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{100}) - 50]^2 \leq 0.$$

— Αν  $f(0) \cdot f(1) < 0$ , τότε, σύμφωνα με το Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον  $\xi \in (0,1)$

$$\text{ώστε } f(\xi) = 0.$$

— Αν  $f(0) \cdot f(1) = 0$ , τότε  $f(0) = 0$  ή  $f(1) = 0$ , οπότε το  $\xi = 0$  ή το  $\xi = 1$  είναι ρίζα της

$$\text{εξίσωσης } f(x) = 0.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in [0,1]$  ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow |\xi - \alpha_1| + |\xi - \alpha_2| + \dots + |\xi - \alpha_{100}| - 50 = 0.$$

### Άσκηση 9.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{1}{x} + \frac{\lambda^2}{x+\kappa} + \frac{\mu^2}{x-\kappa} = 0$  με  $\kappa \cdot \lambda \cdot \mu \neq 0$ , έχει ακριβώς δύο ρίζες

$$\rho_1, \rho_2 \in (-\kappa, \kappa).$$

β. Αν  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \mu^2 - \lambda^2$ , να βρείτε τον αριθμό  $\kappa$ .

### Λύση

α. Για κάθε  $x \neq -\kappa, 0, \kappa$  έχουμε:

$$\frac{1}{x} + \frac{\lambda^2}{x+\kappa} + \frac{\mu^2}{x-\kappa} = 0 \Leftrightarrow (x+\kappa)(x-\kappa) + \lambda^2 x(x-\kappa) + \mu^2 x(x+\kappa) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = (x+\kappa)(x-\kappa) + \lambda^2 x(x-\kappa) + \mu^2 x(x+\kappa)$  και εφαρμόζουμε το

Θ. Bolzano στα διαστήματα  $[-\kappa, 0]$  και  $[0, \kappa]$ .

- Η  $f$  είναι συνεχής (αθροίσματα συνεχών γινομένων) σε καθένα από τα διαστήματα  $[-\kappa, 0]$  και  $[0, \kappa]$ .
- Έχουμε:  $f(-\kappa) = 2\kappa^2\lambda^2 > 0$  αφού  $\kappa \cdot \lambda \neq 0$ .  
 $f(0) = -\kappa^2 < 0$  αφού  $\kappa \neq 0$ .  
 $f(\kappa) = 2\kappa^2\mu^2 > 0$  αφού  $\kappa \cdot \mu \neq 0$ .

$$\text{Άρα: } f(-\kappa) \cdot f(0) = -2\kappa^4\lambda^2 < 0 \text{ και } f(0) \cdot f(\kappa) = -2\kappa^4\mu^2 < 0.$$

Άρα, η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $\rho_1 \in (-\kappa, 0)$  και μία τουλάχιστον ρίζα  $\rho_2 \in (0, \kappa)$ .

$$\text{Επειδή η συνάρτηση } f(x) = (x+\kappa)(x-\kappa) + \lambda^2 x(x-\kappa) + \mu^2 x(x+\kappa) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x^2 - \kappa^2 + \lambda^2 x^2 - \kappa\lambda^2 x + \mu^2 x^2 + \kappa\mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (1 + \lambda^2 + \mu^2)x^2 + (\kappa\mu^2 - \kappa\lambda^2)x - \kappa^2$$

είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού, δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο ρίζες.

Συνεπώς η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ρίζες μόνο τους αριθμούς  $\rho_1, \rho_2 \in (-\kappa, \kappa)$  που είναι δεκτές.



Β. Για τις ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  του τριωνύμου  $f(x) = (1 + \lambda^2 + \mu^2)x^2 + (\kappa\mu^2 - \kappa\lambda^2)x - \kappa^2$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\kappa\mu^2 - \kappa\lambda^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2} \Leftrightarrow \rho_1 + \rho_2 = \frac{\kappa(\lambda^2 - \mu^2)}{1 + \lambda^2 + \mu^2} \text{ και } \rho_1\rho_2 = \frac{-\kappa^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2}$$

$$\text{Άρα: } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{\frac{\kappa(\lambda^2 - \mu^2)}{1 + \lambda^2 + \mu^2}}{\frac{-\kappa^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa}$$

$$\text{Τότε έχουμε: } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \mu^2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa} = \mu^2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \mu^2 - \lambda^2 = \kappa(\mu^2 - \lambda^2) \Leftrightarrow$$

$$(\mu^2 - \lambda^2)(1 - \kappa) = 0 \Leftrightarrow (\mu^2 = \lambda^2 \text{ ή } \kappa = 1) \Leftrightarrow (\mu = \pm\lambda \text{ ή } \kappa = 1). \text{ Άρα:}$$

Αν  $\mu = \lambda$  ή  $\mu = -\lambda$ , τότε ο  $\kappa$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

Αν  $\mu \neq \lambda$  και  $\mu \neq -\lambda$ , τότε  $\kappa = 1$ .

### Άσκηση 10.

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε:

$$f(x)(x^3 - \eta\mu x + e^x) \geq e^x - \sigma\upsilon\nu x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το πρόσημο της  $f(x)$ .

#### Λύση

Έστω ότι η  $f$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Τότε θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , ώστε  $f(x_1) \cdot f(x_2) \leq 0$ .

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ , τότε και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$ , ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , θα ισχύει το Θ. Bolzano για την  $f$  στο  $[x_1, x_2]$ . Άρα θα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ .
- Αν  $f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$ , τότε  $f(x_1) = 0$  ή  $f(x_2) = 0$ , άρα  $\xi = x_1$  ή  $\xi = x_2$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν θα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f(\xi) = 0$ .

Τότε από τη σχέση  $f(x)(x^3 - \eta\mu x + e^x) \geq e^x - \sigma\upsilon\nu x + 1$  για  $x = \xi$  προκύπτει ότι  $0 \geq e^\xi - \sigma\upsilon\nu \xi + 1$  που είναι άτοπο αφού για κάθε  $\xi \in \mathbb{R}$  είναι:

$$e^\xi > 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu \xi \leq 1 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu \xi \geq -1 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu \xi + 1 \geq 0, \text{ οπότε είναι } e^\xi - \sigma\upsilon\nu \xi + 1 > 0.$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Για  $x = 0$  από δοθείσα σχέση βρίσκουμε:  $f(0) \cdot 1 \geq 1 - 1 + 1 \Leftrightarrow f(0) \geq 1$ .

Επειδή  $f(0)$  θετικό και η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ , είναι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### Άσκηση 11.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : [0, 2] \cup [3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 2$ ,  $f(2) = -2$ ,  $f(3) = -1$ ,  $f(4) = 7$ .  
Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της, τότε:

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

#### Λύση

α) Στο διάστημα  $[0, 2]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα διότι είναι γνησίως μονότονη και για  $0 < 2 \Rightarrow f(0) > f(2)$ . Επίσης είναι συνεχής άρα το σύνολο τιμών της στο  $[0, 2]$  είναι το διάστημα  $\Delta_1 = [f(2), f(0)] = [-2, 2]$ .

Στο διάστημα  $[3, 4]$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα διότι είναι γνησίως μονότονη και για  $3 < 4 \Rightarrow f(3) < f(4)$ . Επίσης είναι συνεχής άρα το σύνολο τιμών της στο  $[3, 4]$  είναι το διάστημα  $\Delta_2 = [f(3), f(4)] = [-1, 7]$ .

Τελικά το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = [-2, 7]$ .

β) Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(0, 2)$ , αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και το μηδέν ανήκει στο  $\Delta_1$  (Προφανώς ρίζες της εξίσωσης δεν είναι οι αριθμοί 0 και 2).

Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(3, 4)$ , αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και το μηδέν ανήκει στο  $\Delta_2$  (Προφανώς ρίζες της εξίσωσης δεν είναι οι αριθμοί 3 και 4).

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες άνισες.

### Άσκηση 12.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x + 2$ ,  $x \in (0,1)$ .

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $(x+1)\ln x = 1$  είναι αδύνατη, στο  $(0,1)$ .

#### Λύση

α) Η  $f$  είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα διότι: για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in (0,1)$ , με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow \frac{1}{\ln x_1} > \frac{1}{\ln x_2} \text{ και } -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 2 > -x_2 + 2.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε  $\frac{1}{\ln x_1} - x_1 + 2 > \frac{1}{\ln x_2} - x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln x} - x + 2 \right) = 0 - 0 + 2 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{\ln x} - x + 2 \right) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 2) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{\ln x} \right) = -\infty \text{ (Αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0 \text{ και } x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0)$$

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left( \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, 2)$ .

$$\text{Αν } x \in (0,1) \text{ έχουμε } (x+1)\ln x = 1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} - x + 2 = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3.$$

Όμως ο αριθμός 3 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$  άρα η εξίσωση  $f(x) = 3$  είναι αδύνατη στο  $(0,1)$ . Το ίδιο θα ισχύει και για την ισοδύναμή της εξίσωση  $(x+1)\ln x = 1$ .

### Άσκηση 13.

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln x + e^{x-2}$ .

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^x = e^2(\alpha - \ln x)$ , έχει μοναδική ρίζα για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

γ) Να λυθεί η εξίσωση  $e \ln x + e^{x-1} = 1$ .

#### Λύση

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επίσης είναι γνησίως αύξουσα διότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (1) \text{ και}$$

$$x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow e^{x_1-2} < e^{x_2-2} \quad (2). \text{ Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει}$$

$$\ln x_1 + e^{x_1-2} < \ln x_2 + e^{x_2-2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + e^{x-2}) = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + e^{x-2}) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty$$

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ .

$$\beta) e^x = e^2(\alpha - \ln x) \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} = \alpha - \ln x \Leftrightarrow \ln x + e^{x-2} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha. \text{ Επειδή το } \alpha \text{ ανήκει στο}$$

σύνολο τιμών της  $f$ , το  $\mathbb{R}$ , υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, +\infty)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ . Το  $x_0$  είναι μοναδικό αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η εξίσωση  $f(x) = \alpha$  έχει μοναδική ρίζα και το ίδιο ισχύει και για την ισοδύναμή της, αρχική εξίσωση  $e^x = e^2(\alpha - \ln x)$ .

γ) Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το  $x_0 = 1$  αφού ισχύει  $e \ln 1 + e^{1-1} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ .

$$\text{Επίσης αυτή γράφεται } e \ln x + e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow e \ln x + \frac{e^x}{e} = 1 \Leftrightarrow e^2 \ln x + e^x = e \Leftrightarrow e^x = e - e^2 \ln x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^x = e^2 \left( \frac{1}{e} - \ln x \right). \quad (3)$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, για  $\alpha = \frac{1}{e}$ , η εξίσωση (3) έχει μοναδική ρίζα. Έτσι, η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το  $x_0 = 1$ .

#### Άσκηση 14.

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) < f(\beta)$ , να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$ .

#### Λύση

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ .

Επίσης για τον αριθμό  $\eta = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$  ισχύει ότι  $f(\alpha) < \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3} < f(\beta)$  διότι

$$f(\alpha) < \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3} \Leftrightarrow 3f(\alpha) < f(\alpha) + 2f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \text{ που ισχύει και}$$

$$\frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3} < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) + 2f(\beta) < 3f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \text{ που ισχύει.}$$

Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}.$$

### Άσκηση 15.

Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $f^4(x) - f^3(x) + 2f^2(x) - 4f(x) - 8 = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Λύση

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f^4(x) - f^3(x) + 2f^2(x) - 4f(x) - 8 = 0 \Leftrightarrow (f(x) + 1)(f(x) - 2)(f^2(x) + 4) = 0, \text{ άρα για } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ισχύει}$$

$$(f(x_0) + 1)(f(x_0) - 2)(f^2(x_0) + 4) = 0, \text{ οπότε}$$

ή  $f(x_0) = -1$  ή  $f(x_0) = 2$ , (επειδή μια συνάρτηση σε ένα  $x_0$  δεν μπορεί να πάρει δύο διαφορετικές τιμές).

Οι τιμές λοιπόν που μπορεί να πάρει η συνάρτηση  $f$  στο  $x_0$  είναι ή το  $-1$  ή το  $2$ .

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\text{ή } f(x) = -1 \text{ ή } f(x) = 2, \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι σταθερή συνάρτηση.}$$

Έστω ότι η  $f$  δεν είναι σταθερή συνάρτηση τότε θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  (χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $x_1 < x_2$ ) τέτοια, ώστε  $f(x_1) = -1$  και  $f(x_2) = 2$ .

Για τη συνάρτηση  $f$  έχουμε ότι είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  και  $-1 = f(x_1) \neq f(x_2) = 2$ , άρα ισχύει το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, οπότε η  $f$  θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των  $f(x_1) = -1$  και  $f(x_2) = 2$ , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$  που είναι άτοπο, γιατί  $(0+1)(0-2)(0+4) = -8 \neq 0$ . Επομένως:

$$\text{ή } f(x) = -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

### Άσκηση 16.

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[1, 3]$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [1, 3]$ , ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}.$$

#### Λύση

- Αν η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή τότε  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Άρα  $f(1) = f(2) = f(3) = c$  και

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{c + 3c + 5c}{9} \Leftrightarrow f(\xi) = c. \text{ Άρα ως } \xi \text{ μπορούμε να}$$

επιλέξουμε οποιοδήποτε σημείο του  $[1, 3]$ .

- Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι σταθερή τότε αφού είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[1, 3]$ , ισχύει το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Δηλαδή, η συνάρτηση θα έχει μια ελάχιστη τιμή  $m$  και μια μέγιστη τιμή  $M$ . Οπότε:

$$m \leq f(1) \leq M \quad (1)$$

$$m \leq f(2) \leq M \Rightarrow 3m \leq 3f(2) \leq 3M \quad (2)$$

$$m \leq f(3) \leq M \Rightarrow 5m \leq 5f(3) \leq 5M \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2) και (3) και προκύπτει:

$$9m \leq f(1) + 3f(2) + 5f(3) \leq 9M \Rightarrow m \leq \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9} \leq M. \text{ Δηλαδή ο αριθμός}$$

$\frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}$  ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$ , άρα υπάρχει  $\xi \in [1, 3]$  ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}.$$



### Άσκηση 17.

Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στα διαστήματα  $[-1, 0]$  και  $[0, 1]$ .

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^{f(x)} = 1 - x$  έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

#### Λύση

Αφού η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στα  $[-1, 0]$  και  $[0, 1]$ ,

υπάρχουν  $x_1 \in (-1, 0)$  και  $x_2 \in (0, 1)$  ώστε  $f(x_1) = 0$  και  $f(x_2) = 0$ .

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $e^{f(x)} = 1 - x \Leftrightarrow e^{f(x)} + x - 1 = 0$  έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^{f(x)} + x - 1$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα  $[x_1, x_2]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  διότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0] \cup [0, 1] = [-1, 1]$  και  $[x_1, x_2] \subseteq [-1, 1]$ .
- $g(x_1) \cdot g(x_2) = (e^{f(x_1)} + x_1 - 1) \cdot (e^{f(x_2)} + x_2 - 1) = (e^0 + x_1 - 1) \cdot (e^0 + x_2 - 1) = x_1 \cdot x_2 < 0$   
αφού  $x_1 \in (-1, 0)$  και  $x_2 \in (0, 1)$ .

Άρα, η εξίσωση  $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} + x - 1 = 0$  έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο  $x_0 \in (x_1, x_2)$ .

### Άσκηση 18.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $f(1) \neq 0$  και τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+f(\sin x)}{f(\eta\mu x)} < 0$ .

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  και η ευθεία  $y = x - 1$  έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

#### Λύση

Επειδή οι συναρτήσεις  $f(\sin x)$  και  $f(\eta\mu x)$  είναι συνεχείς στο  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  ως συνθέσεις συνεχών στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεων, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+f(\sin x)}{f(\eta\mu x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1+f(0)}{f(1)} < 0 \Leftrightarrow [1+f(0)] \cdot f(1) < 0. \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $f(x) = x - 1 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = 0$  έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.

Ισοδύναμα, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_0) - x_0 + 1 = 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x + 1$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[0, 1]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  διότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- $g(0) \cdot g(1) = [f(0) + 1] \cdot f(1) < 0$  λόγω της (1).

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 + 1 = 0$ .

### Άσκηση 19.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής  $[-1,1]$  τέτοια ώστε:  $-1 \leq f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in [-1,1]$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\alpha, \beta \in [-1,1]$  τέτοιοι ώστε:  $f(\alpha) + f(\beta) = \alpha - \beta$ .

#### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[-1,1]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[-1,1]$  διότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1,1]$ .
- $g(-1) \cdot g(1) = [f(-1) + 1] \cdot [f(1) - 1] \leq 0$  διότι  $-1 \leq f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in [-1,1]$ .
  - Αν  $g(-1) \cdot g(1) < 0$ , τότε, σύμφωνα με το Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\alpha \in (-1,1)$  ώστε  $g(\alpha) = 0$ .
  - Αν  $g(-1) \cdot g(1) = 0$ , τότε  $g(-1) = 0$  ή  $g(1) = 0$ , οπότε το  $\alpha = -1$  ή το  $\alpha = 1$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $g(x) = 0$ .

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\alpha \in [-1,1]$  ώστε να ισχύει:

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) + x$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[-1,1]$ .

Με διαδικασία ανάλογη με αυτή που ακολουθήσαμε παραπάνω βρίσκουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\beta \in [-1,1]$  ώστε να ισχύει:  $h(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) + \beta = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = -\beta. \quad (2)$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι υπάρχουν  $\alpha, \beta \in [-1,1]$  τέτοιοι ώστε:  $f(\alpha) + f(\beta) = \alpha - \beta$ .

### Άσκηση 20.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $\rho_1 = -1$ ,  $\rho_2 = 3$  είναι δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Δίνεται επίσης ότι  $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = -1$ .

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $xf(x) = x^2 - 1$  έχει μια τουλάχιστον λύση  $x_0 \in (0, 2)$ .

#### Λύση

Επειδή η συνάρτηση  $f$ , ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , είναι συνεχής και στο  $x_1 = e$  έχουμε:

$$f(e) = \lim_{x \rightarrow e} f(x) = -1 < 0.$$

Επειδή η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των διαδοχικών ριζών της  $\rho_1 = -1$ ,  $\rho_2 = 3$  και  $f(e) < 0$  όπου  $e \approx 2,71 \in [-1, 3]$ , συμπεραίνουμε ότι είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [-1, 3]$ . **(1)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = xf(x) - x^2 + 1$  και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 2)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Εφαρμόζουμε για τη συνάρτηση  $g$  το Θ. Bolzano στο  $[0, 2]$ . Έχουμε:

- ο  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  αφού προκύπτει από πράξεις συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$ .
- ο  $g(0) \cdot g(2) = 1 \cdot [2f(2) - 3] < 0$  διότι  $f(2) < 0$  λόγω της **(1)**.

Άρα υπάρχει (ένα τουλάχιστον)  $x_0 \in (0, 2)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

### Άσκηση 21.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες μόνο στα σημεία  $A(0,3)$ ,  $B(2,0)$  και  $\Gamma(5,0)$ . Να αποδείξετε ότι:

α.  $f(1) > 0$ .

β.  $f(3) \cdot f(4) > 0$ .

γ. Υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_0) = f(x_0+1) \cdot f(x_0+2)$ .

### Λύση

α. Δίνεται ότι η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 2 και 5.

Συνεπώς η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 2)$ ,  $(2, 5)$  και  $(5, +\infty)$ .

Επειδή  $f(0) = 3 > 0$ , η  $f$  είναι θετική στο  $(-\infty, 2)$ . Άρα  $f(1) > 0$ .

β. Επειδή  $3 \in (2, 5)$ ,  $4 \in (2, 5)$  και η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(2, 5)$ , έχουμε ότι οι αριθμοί  $f(3)$  και  $f(4)$  είναι ομόσημοι οπότε ισχύει  $f(3) \cdot f(4) > 0$ .

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - f(x+1) \cdot f(x+2)$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[1, 2]$ .

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  αφού η  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και οι  $f(x+1)$ ,  $f(x+2)$  είναι συνθέσεις συνεχών.
- $g(1) \cdot g(2) = [f(1) - f(2) \cdot f(3)] \cdot [f(2) - f(3) \cdot f(4)] =$   
 $[f(1) - 0 \cdot f(3)] \cdot [0 - f(3) \cdot f(4)] = -f(1) \cdot f(3) \cdot f(4) < 0$  λόγω των προηγούμενων ερωτημάτων.

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 2)$  ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(x_0+1) \cdot f(x_0+2)$ .

## Άσκηση 22.

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  οι οποίες είναι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  και τέτοιες ώστε:

$$f^2(x) - g^3(x) \cdot f(x) + e^{-x} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι οι  $f, g$  διατηρούν σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + g(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ .

### Λύση

α.

- Έστω ότι η  $f$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Τότε θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0.$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , θα ισχύει το Θ. Bolzano για την  $f$  στο  $[x_1, x_2]$ .

Άρα θα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  με  $f(\xi) = 0$ .

Τότε από τη σχέση  $f^2(x) - g^3(x) \cdot f(x) + e^{-x} < 0$  για  $x = \xi$  προκύπτει ότι  $e^{-\xi} < 0$  που είναι άτοπο.

Άρα η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

- Έστω ότι η  $g$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Τότε θα υπάρχουν  $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$  με

$$g(x_3) \cdot g(x_4) < 0.$$

Από το Θ. Bolzano για την  $g$  στο  $[x_3, x_4]$  θα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\kappa \in (x_3, x_4)$  με  $g(\kappa) = 0$ .

Τότε από τη σχέση  $f^2(x) - g^3(x) \cdot f(x) + e^{-x} < 0$  για  $x = \kappa$  προκύπτει ότι  $f^2(\kappa) + e^{-\kappa} < 0$  που είναι άτοπο.

Άρα η συνάρτηση  $g$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β. Έστω ότι η εξίσωση  $f(x) + g(x) = 0$  έχει λύση  $\rho \in \mathbb{R}$ . Τότε θα έχουμε:

$$f(\rho) + g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = -g(\rho).$$

Τότε από τη σχέση  $f^2(x) - g^3(x) \cdot f(x) + e^{-x} < 0$  για  $x = \rho$  θα έχουμε:

$$g^2(\rho) + g^4(\rho) + e^{-\rho} < 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η εξίσωση  $f(x) + g(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ .

### Άσκηση 23.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + x - 2$ ,  $x \in (2, +\infty)$ .

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $2 \ln x = 5 - 2x$  είναι αδύνατη, στο  $(2, +\infty)$ .

#### Λύση

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ , με  $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$  (1)

και  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$  (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε  $\ln x_1 + x_1 - 2 < \ln x_2 + x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln x + x - 2) = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x - 2) = +\infty \quad (\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty)$$

Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left( \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (\ln 2, +\infty)$ .

β) Αν  $x \in (2, +\infty)$  έχουμε

$$2 \ln x = 5 - 2x \Leftrightarrow 2 \ln x + 2x = 5 \Leftrightarrow 2 \ln x + 2x - 4 = 1 \Leftrightarrow \ln x + x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Όμως  $\frac{1}{2} < \ln 2 \Leftrightarrow 2 \ln 2 > 1 \Leftrightarrow \ln 4 > \ln e \Leftrightarrow 4 > e$ , που ισχύει. Άρα ο αριθμός  $\frac{1}{2}$  δεν ανήκει στο

σύνολο τιμών της  $f$ . Οπότε η εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2}$  είναι αδύνατη στο  $(2, +\infty)$ . Το ίδιο θα ισχύει και για την ισοδύναμή της εξίσωση  $2 \ln x = 5 - 2x$ .

#### Άσκηση 24.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $f(f(x)) + 2f(x) = x^4 - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  **(1)** και  $f(1) = 0$ .

α) Να βρείτε την τιμή  $f(0)$ .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = -\frac{1}{2}$ .

#### Λύση

α) Στην ισότητα **(1)** θέτουμε  $x = 1$  και γίνεται  $f(f(1)) + 2f(1) = 1^4 - 2 \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} f(0) = -1$ .

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και ισχύει  $f(0) = -1 \neq 0 = f(1)$ .

Για τον αριθμό  $\eta = -\frac{1}{2}$  ισχύει  $f(0) < \eta < f(1)$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = -\frac{1}{2}.$$



## ΘΕΜΑ Δ

### Άσκηση 1.

Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι και γνησίως μονότονη στο  $\Delta$ .

Λύση

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

Έστω ότι η  $f$  δεν είναι γνήσια μονότονη, τότε θα υπάρχουν  $x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$  με  $x_1 < x_2 < x_3$ , έτσι ώστε να μην ισχύει  $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$  ή  $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ .

Επειδή η  $f$  είναι 1-1 θα έχουμε  $f(x_1) \neq f(x_3)$ .

Έστω ότι  $f(x_1) < f(x_3)$ , οπότε θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις  $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$  ή  $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ .

Έστω ότι αληθεύει η  $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ .

Η συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[x_2, x_3]$  είναι συνεχής, οπότε από το Θ.Ε.Τ θα υπάρχει

$\xi \in (x_2, x_3) : f(\xi) = f(x_1)$ , με  $x_1 < x_2 < \xi < x_3 \Rightarrow x_1 \neq \xi$ ,

δηλαδή έχουμε  $x_1 \neq \xi \Rightarrow f(x_1) = f(\xi)$  άτοπο γιατί η  $f$  είναι 1-1.

Ομοίως αποδεικνύεται και στη περίπτωση  $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

## Άσκηση 2.

Δίνεται συνάρτηση  $g$  ορισμένη και συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$  να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  έτσι ώστε να ισχύει:

$$g(x_0) = \frac{\alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + \alpha_3 g(x_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \text{ όπου } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$$

### Λύση

Αφού η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε έχει μέγιστο  $M$  και ελάχιστο  $m$ .

Άρα  $m \leq g(x) \leq M$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

- Αν  $m = M$  δηλαδή η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα τυχαίο  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  για το οποίο θα ισχύει

$$\frac{\alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + \alpha_3 g(x_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)g(x_0)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} = g(x_0).$$

- Αν  $m < M$  τότε έχουμε  $m \leq g(x_1) \leq M \Leftrightarrow \alpha_1 m \leq \alpha_1 g(x_1) \leq \alpha_1 M$

$$m \leq g(x_2) \leq M \Leftrightarrow \alpha_2 m \leq \alpha_2 g(x_2) \leq \alpha_2 M$$

$$m \leq g(x_3) \leq M \Leftrightarrow \alpha_3 m \leq \alpha_3 g(x_3) \leq \alpha_3 M$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)m \leq \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + \alpha_3 g(x_3) \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)M \quad \text{ή}$$
$$m \leq \frac{\alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + \alpha_3 g(x_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \leq M.$$

Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε

$$g(x_0) = \frac{\alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + \alpha_3 g(x_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Άρα τελικά υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε  $g(x_0) = \frac{\alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + \alpha_3 g(x_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$

### Άσκηση 3.

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  τέτοιοι ώστε:  $\alpha \neq 0$  και  $\alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2 < 0$ .

Να αποδείξετε ότι  $\beta^2 > 4\alpha\gamma$ .

#### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $[-1, 0]$ .

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  ως πολυωνυμική.
- $f(-1) \cdot f(0) = (\alpha - \beta + \gamma) \cdot \gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2 < 0$

Άρα η εξίσωση  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση (στο διάστημα  $(-1, 0)$ )

Άρα το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  έχει μη αρνητική διακρίνουσα.

Δηλαδή ισχύει:  $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 \geq 4\alpha\gamma$ . Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι  $\beta^2 \neq 4\alpha\gamma$ .

Αν υποθέσουμε ότι  $\beta^2 = 4\alpha\gamma$ , τότε  $\gamma = \frac{\beta^2}{4\alpha}$ , αφού  $\alpha \neq 0$ .

Αντικαθιστώντας το  $\gamma$  στη δοθείσα ανισοτική σχέση έχουμε:

$$\alpha \frac{\beta^2}{4\alpha} - \beta \frac{\beta^2}{4\alpha} + \left( \frac{\beta^2}{4\alpha} \right)^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^2}{4\alpha} - \frac{\beta^3}{4\alpha} + \frac{\beta^4}{16\alpha^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4}{16\alpha^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta^2(4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2)}{16\alpha^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2(2\alpha - \beta)^2}{16\alpha^2} < 0, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Επομένως είναι  $\beta^2 > 4\alpha\gamma$ .

#### Άσκηση 4.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , έτσι ώστε να ισχύουν

- $f(0) = 0$  και
- $e^{2f(x)} + 2xe^{f(x)} = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  αν είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^{2f(x)} - 2017 = 0$ , έχει ακριβώς μία ρίζα.

#### Λύση

$$1. e^{2f(x)} + 2xe^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow e^{2f(x)} + 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} + x)^2 = x^2 + 1 > 0, \quad (1).$$

Δηλαδή η  $g(x) = e^{f(x)} + x \neq 0$  και επειδή η  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, τότε η συνάρτηση  $g$  θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως

$g(0) = e^{f(0)} + 0 = 1 > 0$ , οπότε  $g(x) > 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} + x > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , και από την (1) έχουμε:

$$(e^{f(x)} + x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1} - x \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , τότε το σύνολο τιμών της είναι,  $f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$  διότι:

Αν  $u = \sqrt{x^2 + 1} - x$ , τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} u &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty. \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) \right) = (+\infty) \cdot 2 = +\infty, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty.$$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^{2f(x)} - 2017$ , η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Επίσης:

- Η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , γιατί αν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{e^x \uparrow} e^{2f(x_1)} > e^{2f(x_2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2f(x_1)} - 2017 > e^{2f(x_2)} - 2017 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2f(x)} - 2017) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (e^{2u} - 2017) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2f(x)} - 2017) = \lim_{u \rightarrow -\infty} (e^{2u} - 2017) = -2017$ , άρα το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης  $g$  είναι το διάστημα  $(-2017, +\infty)$  με το  $0 \in (-2017, +\infty)$  οπότε από το Θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $g(\xi) = 0 \Rightarrow e^{2f(\xi)} - 2017 = 0$ . Η ρίζα είναι μοναδική αφού η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα.

### Άσκηση 5.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(\eta\mu^2 x) + e^x = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

#### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln(\eta\mu^2 x) + e^x$  και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(\eta\mu^2 x) + e^x] = -\infty$ , γιατί  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x) = e^0 = 1$  και αν θέσουμε

$\eta\mu^2 x = u$ , τότε όταν το  $x \rightarrow 0^+$  το  $u \rightarrow 0^+$ ,

οπότε έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(\eta\mu^2 x)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , είναι  $f(x) < 0$  κοντά στο μηδέν από μεγαλύτερες τιμές.

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε  $f(x_1) < 0$ .

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln 1 + e^{\frac{\pi}{2}} = 0 + e^{\frac{\pi}{2}} > 0.$$

Επομένως ισχύει το θεώρημα Bolzano για την  $f$  στο  $\left[x_1, \frac{\pi}{2}\right]$  διότι:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[x_1, \frac{\pi}{2}\right]$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $f(x_1) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ .

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , ώστε  $f(x_0) = 0$ .

### Άσκηση 6.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ .

Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

### Λύση

Οι ευθείες που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων έχουν εξίσωση της μορφής  $y = x + \alpha$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $f(x) = x + \alpha$  έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x - \alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \mathbb{R}$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - \alpha] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \left( \frac{f(x)}{x} - 1 - \frac{\alpha}{x} \right) \right] = +\infty, \text{ γιατί}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - 1 - \frac{\alpha}{x} \right) = 0 - 1 - 0 = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

Άρα υπάρχει  $\kappa < 0$  ώστε:  $g(\kappa) > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - \alpha] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \frac{f(x)}{x} - 1 - \frac{\alpha}{x} \right) \right] = -\infty, \text{ γιατί}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - 1 - \frac{\alpha}{x} \right) = -1 - 1 - 0 = -2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Άρα υπάρχει  $\lambda > 0$  ώστε:  $g(\lambda) < 0$ .

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ισχύει το θεώρημα Bolzano για την  $g$  στο  $[\kappa, \lambda]$  διότι:

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[\kappa, \lambda]$  αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- $g(\kappa) \cdot g(\lambda) < 0$ .

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\kappa, \lambda)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

### Άσκηση 7.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha^x - 2\alpha, & x \geq 0 \\ \ln(x+1) - \eta\mu 3x, & -1 < x < 0 \end{cases}$  όπου  $\alpha > 0$ .

α. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής.

β. Για την τιμή του  $\alpha$  του προηγούμενου ερωτήματος να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\alpha^x + 2 = \ln(x+1)$  έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

### Λύση

α. Αν  $x > 0$ , η  $f$  είναι συνεχής ως διαφορά της εκθετικής  $y = \alpha^x$  με τον αριθμό  $2\alpha$ .

Αν  $-1 < x < 0$ , η  $f$  είναι συνεχής αφού οι συναρτήσεις  $\ln(x+1)$  και  $\eta\mu 3x$  είναι συνθέσεις συνεχών.

Αν  $x = 0$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha^x - 2\alpha) = 1 - 2\alpha.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [\ln(x+1) - \eta\mu 3x] = 0 - 0 = 0.$$

$$f(0) = \alpha^0 - 2\alpha = 1 - 2\alpha.$$

Για να είναι η  $f$  συνεχής αρκεί  $2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ .

β. Για  $\alpha = \frac{1}{2}$  έχουμε:  $\alpha^x + 2 = \ln(x+1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 - \ln(x+1) = 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 - \ln(x+1)$  και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει

μοναδικός  $x_0 \in (0, +\infty)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Είναι:

- $g(0) = 1 + 2 - 0 = 3 > 0$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 - \ln(x+1) \right] = -\infty$

γιατί  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \right] = 0 + 2 = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1)] = +\infty$

Επομένως είναι  $g(x) < 0$  στην περιοχή του  $+\infty$ . Άρα υπάρχει  $\kappa > 0$  ώστε:  $g(\kappa) < 0$ .



Επομένως ισχύει το θεώρημα Bolzano για την  $g$  στο  $[0, \kappa]$  διότι:

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, \kappa]$  αφού προκύπτει από πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $g(0) \cdot g(\kappa) < 0$

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0, \kappa) \subset (0, +\infty)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Για να αποδείξουμε ότι η ρίζα  $x_0$  είναι μοναδική, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(0, +\infty)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

— Η συνάρτηση  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$  οπότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} + 2 > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} + 2 \quad (1)$$

— Η συνάρτηση  $y = \ln x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  οπότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1) \Leftrightarrow -\ln(x_1 + 1) > -\ln(x_2 + 1) \quad (2)$$

Αν προσθέσουμε τις (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} + 2 - \ln(x_1 + 1) > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} + 2 - \ln(x_2 + 1) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ , οπότε η ρίζα  $x_0$  είναι μοναδική.

### Άσκηση 8.

Έστω συνάρτηση  $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[-2, 4]$  με  $f(-2) = f(4)$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = f(x-1) - f(x+1)$  και να αποδείξετε ότι αυτή είναι συνεχής.

β. Να αποδείξετε ότι:  $g(-1) + g(1) + g(3) = 0$ .

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in [-1, 3]$  ώστε:  $f(\xi-1) = f(\xi+1)$ .

### Λύση

α. Η συνάρτηση  $f(x-1)$ , ως σύνθεση των  $f(x)$  με  $D_f = [-2, 4]$  και της  $h(x) = x-1$  με

$$D_h = \mathbb{R}, \text{ ορίζεται όταν: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -2 \leq x-1 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [-1, 5].$$

Η συνάρτηση  $f(x+1)$ , ως σύνθεση των  $f(x)$  με  $D_f = [-2, 4]$  και της  $\varphi(x) = x+1$  με

$$D_\varphi = \mathbb{R}, \text{ ορίζεται όταν: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -2 \leq x+1 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3, 3].$$

Άρα το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι:  $D_g = [-1, 5] \cap [-3, 3] = [-1, 3]$ .

Προφανώς η  $g$  είναι συνεχής στο  $D_g$  αφού προκύπτει από σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

β. Θέτοντας στην  $g(x) = f(x-1) - f(x+1)$  διαδοχικά  $x = -1$ ,  $x = 1$  και  $x = 3$ , προκύπτουν οι σχέσεις:  $g(-1) = f(-2) - f(0)$ ,  $g(1) = f(0) - f(2)$  και  $g(3) = f(2) - f(4)$ .

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$g(-1) + g(1) + g(3) = f(-2) - f(4) = 0. \quad (1)$$

γ. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

— Η (1) να αληθεύει όταν:  $g(-1) = g(1) = g(3) = 0$ . Τότε οι αριθμοί  $-1, 1, 3$  είναι λύσεις της εξίσωσης  $g(x) = 0$ .

— Η (1) να αληθεύει όταν δεν είναι και οι τρεις προσθετέοι του πρώτου μέλους μηδέν. Τότε οι δύο από αυτούς είναι ετερόσημοι. Έστω  $g(-1) \cdot g(1) < 0$ .

Τότε ισχύει στο  $[-1,1]$  το Θ. Bolzano για την  $g$ , αφού ήδη η  $g$  είναι συνεχής στο  $[-1,1]$  ως συνεχής στο  $[-1,3]$ . Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (-1,1) \subset (-1,3)$  τέτοιο ώστε:  $g(\xi) = 0$ . Όμοια, αν  $g(-1) \cdot g(3) < 0$  ή  $g(1) \cdot g(3) < 0$ , η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $(-1,3)$  ή στο  $(1,3) \subset (-1,3)$  αντίστοιχα.

Τελικά σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in [-1,3]$  τέτοιο ώστε:

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi - 1) = f(\xi + 1).$$

### Άσκηση 9.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και τέτοια ώστε:  $f^2(x) + 2f(x) \cdot \sin x = x^2 + \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = -2$ .

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + \sin x$  διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ .

### Λύση

α. Έστω ότι η συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) συνάρτηση  $g$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Τότε θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , ώστε  $g(x_1) \cdot g(x_2) \leq 0$ .

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν  $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$ , τότε εφαρμόζοντας για τη συνάρτηση  $g$  το Θ. Bolzano στο  $[x_1, x_2]$  συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  ώστε  $g(\xi) = 0$ .
- Αν  $g(x_1) \cdot g(x_2) = 0$ , τότε  $g(x_1) = 0$  ή  $g(x_2) = 0$ , άρα  $\xi = x_1$  ή  $\xi = x_2$ .

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν θα υπάρχει ένας τουλάχιστον

$\xi \in \mathbb{R}$  ώστε  $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = -\sin \xi$ . Όμως τότε από τη δοθείσα σχέση για  $x = \xi$  έχουμε:

$$f^2(\xi) + 2f(\xi) \cdot \sin \xi = \xi^2 + \eta\mu^2 \xi \Leftrightarrow (-\sin \xi)^2 + 2(-\sin \xi) \cdot \sin \xi = \xi^2 + \eta\mu^2 \xi \Leftrightarrow$$

$$-\sin^2 \xi = \xi^2 + \eta\mu^2 \xi \Leftrightarrow -\sin^2 \xi - \eta\mu^2 \xi = \xi^2 \Leftrightarrow -1 = \xi^2, \text{ που είναι άτοπο}$$

Συνεπώς η συνάρτηση  $g$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Όμως  $g(0) = f(0) + \sin 0 = -2 + 1 = -1 < 0$ . Άρα  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f^2(x) + 2f(x) \cdot \sin x = x^2 + \eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) \cdot \sin x = x^2 + 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2f(x) \cdot \sin x + \sin^2 x = x^2 + 1 \Leftrightarrow [f(x) + \sin x]^2 = (\sqrt{x^2 + 1})^2 \Leftrightarrow$$

$$g^2(x) - (\sqrt{x^2 + 1})^2 = 0 \Leftrightarrow [g(x) - \sqrt{x^2 + 1}] \cdot [g(x) + \sqrt{x^2 + 1}] = 0. \quad (1)$$

Επειδή  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε:  $g(x) - \sqrt{x^2 + 1} < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επομένως από την (1) βρίσκουμε:  $g(x) + \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow g(x) = -\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$$f(x) + \sin x = -\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = -\sin x - \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### Άσκηση 10.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) + f(x) = x^2 + x + 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1) και  $f(0) = 1$ . Να δείξετε ότι:

α) Η εξίσωση  $f(x) = 0$  είναι αδύνατη.

β)  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ) Η ευθεία  $y = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .

### Λύση

α) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ρίζα τον αριθμό  $\rho \in \mathbb{R}$ . Τότε ισχύει  $f(\rho) = 0$  και η (1) γίνεται  $f^2(\rho) + f(\rho) = \rho^2 + \rho + 2 \Leftrightarrow \rho^2 + \rho + 2 = 0$  αδύνατη αφού έχει  $\Delta < 0$ . Άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  είναι αδύνατη.

β) Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $f$  θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Επιπλέον είναι  $f(0) = 1 > 0$ . Άρα  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ .

Στην (1), για  $x = 1$ , έχουμε  $f^2(1) + f(1) - 4 = 0$ . Λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο το  $f(1)$  και προκύπτει  $f(1) = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$  ή  $f(1) = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$  (απορρίπτεται). Επίσης έχουμε

$f(0) = 1 \neq f(1)$  και  $1 < \frac{1+\sqrt{17}}{4} < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow 4 < 1+\sqrt{17} < -2+2\sqrt{17}$  που ισχύει.

Άρα, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$ , τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

### Άσκηση 11.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$f(1) = 3$  και  $f(f(x)) + f(x) = 8$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1). Να δείξετε ότι:

α) η  $f$  δεν είναι 1-1.

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 3)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = 6$ , όπου  $g(x) = f(x) + x$ .

γ) η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(3,01, 4,99)$ .

#### Λύση

α) Στην (1) για  $x = 1$ , έχουμε  $f(f(1)) + f(1) = 8 \Rightarrow f(3) + 3 = 8 \Rightarrow f(3) = 5$ .

Στην (1) για  $x = 3$ , έχουμε  $f(f(3)) + f(3) = 8 \Rightarrow f(5) + 5 = 8 \Rightarrow f(5) = 3$ .

Έτσι, είναι  $1 \neq 5$ , όμως  $f(1) = f(5)$ . Άρα η  $f$  δεν είναι 1-1.

β) Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[1, 3]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$g(1) = f(1) + 1 = 4$  και  $g(3) = f(3) + 3 = 8$ . Άρα είναι  $g(1) \neq g(3)$ . Επίσης ο αριθμός  $\eta = 6$ , βρίσκεται μεταξύ των  $g(1)$ ,  $g(3)$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 3)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = 6$ .

γ) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 3]$  και  $f(1) \neq f(3)$ . Ο αριθμός  $\kappa = 3,01$  βρίσκεται μεταξύ των  $f(1)$  και  $f(3)$  ( $3 < 3,01 < 5$ ). Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (1, 3)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_1) = 3,01$ .

Στην (1) για  $x = x_1$ , έχουμε  $f(f(x_1)) + f(x_1) = 8 \Rightarrow f(3,01) + 3,01 = 8 \Rightarrow f(3,01) = 4,99$ .

Άρα η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(3,01, 4,99)$ .

## Άσκηση 12.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \kappa}{x^2 - 1} = l_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \lambda}{x - 2} = l_2 \in \mathbb{R}$  με  $\kappa \cdot \lambda > 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 2)$ .

β) Αν επιπλέον, η  $f$  είναι γνησίως μονότονη και  $f(2) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

i.  $f(x) \leq f(1)$  για κάθε  $x \in [1, 2]$ .

ii. Η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την ευθεία  $y = -\frac{f(2)}{2}$ .

### Λύση

α) Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  θα είναι συνεχής και στα άκρα, δηλαδή στα 1 και 2, οπότε θα ισχύουν:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

Θέτουμε:  $\frac{f(x) + \kappa}{x^2 - 1} = g_1(x)$ , με  $\lim_{x \rightarrow 1} g_1(x) = l_1 \in \mathbb{R}$  και  $\frac{f(x) - \lambda}{x - 2} = g_2(x)$ , με  $\lim_{x \rightarrow 2} g_2(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε:  $\frac{f(x) + \kappa}{x^2 - 1} = g_1(x) \Rightarrow f(x) = (x^2 - 1)g_1(x) - \kappa$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 - 1)g_1(x) - \kappa] = -\kappa \Rightarrow f(1) = -\kappa.$$

Επίσης:  $\frac{f(x) - \lambda}{x - 2} = g_2(x) \Rightarrow f(x) = (x - 2)g_2(x) + \lambda$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2)g_2(x) + \lambda] = \lambda \Rightarrow f(2) = \lambda.$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  και ισχύει  $f(1)f(2) = -\kappa\lambda < 0$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 2)$ .

β)

i. Από το ερώτημα (α) έχουμε  $f(1)f(2) = -\kappa\lambda < 0$ . Είναι  $f(2) < 0$  άρα  $f(1) > 0$ , δηλαδή για  $1 < 2 \Rightarrow f(1) > f(2)$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή η  $f$  είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το  $[f(2), f(1)]$ . Οπότε, το  $f(1)$  είναι το μέγιστο και ισχύει  $f(x) \leq f(1)$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$ .

ii. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  και  $f(1) \neq f(2)$ .

Επιπλέον ο αριθμός  $\eta = -\frac{f(2)}{2}$  βρίσκεται μεταξύ των  $f(2)$  και  $f(1)$  αφού

$$f(2) < -\frac{f(2)}{2} < f(1) \Leftrightarrow 2f(2) < -f(2) < 2f(1) \Leftrightarrow$$

$$2f(2) < -f(2) < -4f(2) \Leftrightarrow 3f(2) < 0 < -3f(2) \text{ που ισχύει, αφού } f(2) < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 2)$  ώστε  $f(x_0) = -\frac{f(2)}{2}$ . Αυτό το  $x_0$  είναι μοναδικό αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την ευθεία  $y = -\frac{f(2)}{2}$ .



### Άσκηση 13.

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = 5$  και  $f(5) = 1$ .

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = c$ , όπου  $c \in [1, 5]$ .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\gamma \in (1, 5)$  τέτοιο ώστε  $9f(\gamma) = 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$ .

### Λύση

α) Ισχύει  $1 < 5 \Rightarrow f(1) > f(5)$ , αφού  $f(1) = 5$  και  $f(5) = 1$  και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη. Άρα θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή επιπλέον είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $[f(5), f(1)] = [1, 5]$ .

β) Επειδή ο αριθμός  $c \in [1, 5]$  που είναι το σύνολο τιμών της  $f$ , σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in [1, 5]$  ώστε  $f(x_0) = c$ . Αυτό το  $x_0$  είναι μοναδικό διότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 5]$ .

i.  $f(1) \neq f(5)$ .

ii.  $1 < 2 < 5 \Rightarrow f(1) > f(2) > f(5) \Rightarrow 2f(1) > 2f(2) > 2f(5)$  (1)

iii.  $1 < 3 < 5 \Rightarrow f(1) > f(3) > f(5) \Rightarrow 3f(1) > 3f(3) > 3f(5)$  (2)

iv.  $1 < 4 < 5 \Rightarrow f(1) > f(4) > f(5) \Rightarrow 4f(1) > 4f(4) > 4f(5)$  (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1), (2), (3) και προκύπτει:

$$9f(1) > 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) > 9f(5) \Rightarrow f(1) > \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} > f(5).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\gamma \in (1, 5)$  ώστε

$$f(\gamma) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \Leftrightarrow 9f(\gamma) = 2f(2) + 3f(3) + 4f(4). \text{ Το } \gamma \text{ είναι μοναδικό γιατί η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.}$$

#### Άσκηση 14.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(x^2 - 2x) + f(x) = 3x^2 - 3x + 8, x \in \mathbb{R}$  (1). Να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = x_0 + 5$ .

β) Η ευθεία  $y = c$  με  $c \in (1, 13)$  έχει με την γραφική παράσταση της  $f$  ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη  $x_1 \in (-1, 3)$ .

#### Λύση

α) Στην (1) για  $x = 0$ , έχουμε  $f(0) + f(0) = 8 \Leftrightarrow f(0) = 4$  και για  $x = 2$ , έχουμε  $f(0) + f(2) = 12 - 6 + 8 \Rightarrow f(2) = 10$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x - 5, x \in [0, 2]$ .

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$g(0) = f(0) - 5 = 4 - 5 = -1 < 0$  και  $g(2) = f(2) - 2 - 5 = 10 - 7 = 3 > 0$ . Δηλαδή είναι  $g(0) \cdot g(2) < 0$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 + 5$ .

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 3]$  και θέτοντας στην (1)  $x = 3$ , προκύπτει  $f(3) + f(3) = 27 - 9 + 8 \Leftrightarrow 2f(3) = 26 \Leftrightarrow f(3) = 13$ , ενώ για  $x = -1$  προκύπτει  $f(3) + f(-1) = 3 + 3 + 8 \Rightarrow f(-1) = 14 - 13 \Rightarrow f(-1) = 1$ .

Δηλαδή είναι  $f(-1) \neq f(3)$ . Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, για κάθε αριθμό  $c$  μεταξύ των  $f(-1)$  και  $f(3)$ , δηλαδή  $c \in (1, 13)$ , υπάρχει  $x_1 \in (-1, 3)$ , τέτοιο ώστε  $f(x_1) = c$ .

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία  $y = c$  με  $c \in (1, 13)$  έχει με την γραφική παράσταση της  $f$  ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη  $x_1 \in (-1, 3)$ .

### Άσκηση 15.

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  συνεχείς στο  $[0, 2]$  για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- $f^2(0) + f^2(2) = 4(f(2) - 1)$  (1)
- $0 \leq g(x) \leq 2$  για κάθε  $x \in [0, 2]$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 1$ .

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_1 \in [0, 2]$ .

γ) Αν επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως μονότονη, να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(2 - x)$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, 2)$ .

#### Λύση

α) Από την ισότητα (1) έχουμε:

$$f^2(0) + f^2(2) - 4f(2) + 4 = 0 \Leftrightarrow f^2(0) + (f(2) - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ και } f(2) = 2.$$

Δηλαδή  $f(0) \neq f(2)$  και ο αριθμός 1 βρίσκεται μεταξύ των  $f(0)$  και  $f(2)$ .

Επιπλέον η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$ .

Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 1$ .

β) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in [0, 2]$ , ώστε

$$f(x_1) = g(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - g(x)$ ,  $x \in [0, 2]$ . Είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$h(0) = f(0) - g(0) = -g(0) \leq 0 \text{ και } h(2) = f(2) - g(2) = 2 - g(2) \geq 0.$$

Δηλαδή  $h(0) \cdot h(2) \leq 0$ . Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν  $h(0) \cdot h(2) < 0$ , τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (0, 2)$  ώστε  $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) = 0$ .
- Αν  $h(0) \cdot h(2) = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$  ή  $h(2) = 0$ , δηλαδή οι αριθμοί 0 και 2 είναι ρίζες της εξίσωσης  $h(x) = 0$ .

Τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in [0, 2]$ , ώστε  $f(x_1) = g(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) = 0$ .

γ) Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = f(x) - f(2-x)$ . Για το πεδίο ορισμού της έχουμε:

$$x \in [0, 2] \text{ και } 0 \leq 2-x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2.$$

Τελικά το πεδίο ορισμού της  $\varphi$  είναι το  $[0, 2]$ .

Η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\varphi(0) = f(0) - f(2) = -2 < 0 \text{ και } \varphi(2) = f(2) - f(0) = 2 > 0. \text{ Άρα } \varphi(0) \cdot \varphi(2) < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 2)$ , η οποία είναι μοναδική αφού και η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα:

Η  $f$  είναι γνησίως μονότονη και ισχύει,  $f(0) = 0 < 2 = f(2)$  άρα είναι γνησίως αύξουσα.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (2) \text{ και}$$

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow 2-x_1 > 2-x_2 \Rightarrow f(2-x_1) > f(2-x_2) \Rightarrow -f(2-x_1) < -f(2-x_2) \quad (3).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (2) και (3) και προκύπτει

$$f(x_1) - f(2-x_1) < f(x_2) - f(2-x_2) \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2).$$

### Άσκηση 16.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και τέτοια ώστε:  $xf(x) + 2\eta\mu x = x + 2x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον θετικό οριζόντιο ημιάξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

#### Λύση

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, +\infty)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

Για κάθε  $x \neq 0$  έχουμε:

$$xf(x) + 2\eta\mu x = x + 2x^3 \Leftrightarrow \frac{xf(x) + 2\eta\mu x}{x} = \frac{x(1 + 2x^2)}{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) + 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = 1 + 2x^2 \Leftrightarrow f(x) = 1 + 2x^2 - 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ 1 + 2x^2 - 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 1 + 0 - 2 \cdot 1 = -1 < 0.$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) < 0$ , είναι  $f(x) < 0$  κοντά στο μηδέν. Άρα υπάρχει  $x_1 > 0$  ώστε:

$$f(x_1) < 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + 2x^2 - 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 1 + \infty - 2 \cdot 0 = +\infty.$

(Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$  διότι:  $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$  και εφαρμόζουμε το κριτήριο

παρεμβολής)

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , είναι  $f(x) > 0$  στην περιοχή του  $+\infty$ . Άρα υπάρχει  $x_2 > 0$  με

$$x_2 > x_1 \text{ ώστε: } f(x_2) > 0.$$

Επομένως ισχύει το θεώρημα Bolzano για την  $f$  στο  $[x_1, x_2]$  διότι:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  αφού προκύπτει από συνεχείς συναρτήσεις.
- $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ .

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (0, +\infty)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

### Άσκηση 17.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f(0) = 0$  και  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2}$  για κάθε

$$x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

β. Να αποδείξετε ότι:  $-\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{1}{2}$

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2x - 1$  έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

### Λύση

α. Θα δείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο τυχόν  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Δηλαδή θα δείξουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Από τη σχέση (1) για  $y = x_0$  έχουμε:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{2} \Leftrightarrow -\frac{|x - x_0|}{2} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{|x - x_0|}{2}$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow x_0} \left( -\frac{|x - x_0|}{2} \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x - x_0|}{2} = 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

β. Από τη σχέση (1) για  $x = 1$  και  $y = 0$ , έχουμε:

$$|f(1) - f(0)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f(1)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{1}{2}$$

γ. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $f(x) - 2x + 1 = 0$  έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2x + 1$  και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός

$$\xi \in \mathbb{R} \text{ ώστε } g(\xi) = 0.$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για τη συνάρτηση  $g$  στο  $[0, 1]$ .

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  αφού έχουμε δείξει ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

- $g(0) \cdot g(1) = [f(0)+1] \cdot [f(1)-2+1] = f(1)-1 < 0$  διότι έχουμε:

$$-\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}-1 \leq f(1)-1 \leq \frac{1}{2}-1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq f(1)-1 \leq -\frac{1}{2}$$

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (0,1)$  ώστε  $g(\xi) = 0$ .

Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $g(x) = 0$  δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$ , μελετούμε το πρόσημο του λόγου  $\lambda = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$ .

$$\text{Είναι: } \lambda = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{[f(x_1)-2x_1+1]-[f(x_2)-2x_2+1]}{x_1-x_2} =$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)-2(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 2. \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) για  $x = x_1$  και  $y = x_2$  με  $x_1 \neq x_2$ , έχουμε:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq \frac{|x_1-x_2|}{2} \Leftrightarrow \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}-2 \leq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-2 \leq \frac{1}{2}-2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -\frac{5}{2} \leq \lambda \leq -\frac{3}{2}$$

Επομένως είναι  $\lambda < 0$  που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

### Άσκηση 18.

Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής και γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} [\sin x \cdot f(x) + e^x \cdot f(x+1)] = 0.$$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιος ώστε  $f(\xi) = 0$ .

β. Να αποδείξετε ότι  $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(3) \cdot f(6) > 0$ .

#### Λύση

α. Η συνάρτηση  $g(x) = \sin x \cdot f(x) + e^x \cdot f(x+1)$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  αφού προκύπτει από άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Επομένως: } g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Leftrightarrow g(1) = 0 \Leftrightarrow \sin 1 \cdot f(1) + e \cdot f(2) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{e \cdot f(2)}{\sin 1}, \quad (1)$$

( $\sin 1 > 0$ , διότι  $1 \text{ rad} \approx 57^\circ$ )

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την  $f$  στο διάστημα  $[1, 2]$ .

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$  ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- $f(1) \cdot f(2) = -\frac{e \cdot f(2)}{\sin 1} \cdot f(2) = -\frac{e \cdot f^2(2)}{\sin 1} < 0$ . Η περίπτωση  $f^2(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0$  αποκλείεται διότι τότε από την (1) θα είχαμε και  $f(1) = 0$  που είναι άτοπο αφού η  $f$  είναι γνησίως μονότονη και επομένως δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες.

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (1, 2)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ .

Η ρίζα  $\xi$  της εξίσωσης  $f(x) = 0$  είναι μοναδική αφού η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

β. Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και έχει μοναδική ρίζα  $\xi \in (1, 2)$ , θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, \xi)$  και  $(\xi, +\infty)$ .

Επειδή οι αριθμοί  $-2 \in (-\infty, \xi)$  και  $-1 \in (-\infty, \xi)$ , οι αριθμοί  $f(-2)$  και  $f(-1)$  είναι ομόσημοι.

Άρα:  $f(-2) \cdot f(-1) > 0$ .

Όμοια έχουμε  $f(3) \cdot f(6) > 0$  αφού οι αριθμοί 3 και 6 βρίσκονται στο διάστημα  $(\xi, +\infty)$  όπου η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Συνεπώς είναι:  $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(3) \cdot f(6) > 0$ .



### Άσκηση 19.

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και συνεχής στο  $[-2, 2]$  με  $f(-1) = -3$  και τέτοια ώστε:

$$x^3 + f^2(x) = 8 \text{ για κάθε } x \in (-2, 2).$$

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(-2, 2)$ .

γ. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f(x)$ .

#### Λύση

α. Έστω  $x_0 \in [-2, 2]$  μια ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Τότε θα έχουμε  $f(x_0) = 0$ .

Η σχέση  $x^3 + f^2(x) = 8$  για  $x = x_0$  γίνεται:

$$x_0^3 + f^2(x_0) = 8 \Leftrightarrow x_0^3 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2, \text{ που είναι δεκτή αφού } 2 \in [-2, 2].$$

β. Έστω ότι η  $f$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(-2, 2)$ .

Τότε θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (-2, 2)$  με  $x_1 < x_2$  και  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ .

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως συνεχής στο  $[-2, 2]$ , θα ισχύει το Θ. Bolzano για την  $f$  στο  $[x_1, x_2]$ . Άρα θα υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  με  $f(\xi) = 0$ .

Τότε από τη σχέση  $x^3 + f^2(x) = 8$  για  $x = \xi$  προκύπτει ότι  $\xi^3 = 8 \Leftrightarrow \xi = 2$  που είναι άτοπο διότι:  $\xi \in (x_1, x_2)$  και  $(x_1, x_2) \subseteq (-2, 2)$ .

Άρα η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(-2, 2)$ .

Επειδή επιπλέον έχουμε  $f(-1) = -3 < 0$ , θα είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-2, 2)$ .

γ. Για κάθε  $x \in (-2, 2)$  έχουμε:

$$x^3 + f^2(x) = 8 \Leftrightarrow f^2(x) = 8 - x^3 \Leftrightarrow f^2(x) = \left(\sqrt{8 - x^3}\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{8 - x^3}.$$

Επειδή είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-2, 2)$ , από την (1) έχουμε:

$$-f(x) = \sqrt{8 - x^3} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{8 - x^3}.$$

### Άσκηση 20.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε  $e^{x_0} = 2\sin x_0$ .

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (e^x - 2\sin x)^2 + 1$  παρουσιάζει ελάχιστο.

### Λύση

α. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε  $e^{x_0} - 2\sin x_0 = 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = e^x - 2\sin x$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ως διαφορά συνεχών.
- $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 - 2 \cdot 1) \cdot \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 2 \cdot 0\right) = -e^{\frac{\pi}{2}} < 0$ .

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

Για να αποδείξουμε ότι το  $x_0$  είναι μοναδικό, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε:

Η συνάρτηση  $y = e^x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  οπότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}. \quad (1)$$

Η συνάρτηση  $y = \sin x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  οπότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sin x_1 > \sin x_2 \Leftrightarrow -2\sin x_1 < -2\sin x_2. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} - 2\sin x_1 < e^{x_2} - 2\sin x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Επομένως υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε  $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = 2\sin x_0$ .

**Β.** Η συνάρτηση  $g(x) = (e^x - 2\sin x)^2 + 1$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:  $(e^x - 2\sin x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (e^x - 2\sin x)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq 1$ . **(3)**

Θέτοντας στη  $g(x)$  όπου  $x$  το  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  του προηγούμενου ερωτήματος βρίσκουμε:

$$g(x_0) = (e^{x_0} - 2\sin x_0)^2 + 1 \Leftrightarrow g(x_0) = 1. \quad \mathbf{(4)}$$

Από τις **(3)** και **(4)** προκύπτει:  $g(x) \geq g(x_0) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Συνεπώς η συνάρτηση  $g(x)$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ίσο με  $g(x_0) = 1$ .

### Άσκηση 21.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει  $f^2(x) - 2xf(x) = 5$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$ , διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Αν  $f(2) = -1$ , τότε:

- Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$ .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = -2017$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $(-\infty, 0)$ .
- Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{-5}{x + \sqrt{x^2 + 5}}$ .
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, 3)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = \frac{f(1) + 3f(2) + 2f(3)}{6}$ .

### Λύση

$$1. f^2(x) - 2xf(x) = 5 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 5 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 5 + x^2 \Leftrightarrow g^2(x) = 5 + x^2 > 0$$

Δηλαδή  $g(x) \neq 0$  και επειδή η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

2.

- Είναι  $g(2) = f(2) - 2 = -1 - 2 = -3 < 0$ , που σημαίνει ότι  $g(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα  $g^2(x) = 5 + x^2 \Rightarrow g(x) = -\sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

II. Έστω  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$  με  $x_1 < x_2$  (1). Τότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 5 > x_2^2 + 5 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 5} > \sqrt{x_2^2 + 5} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1^2 + 5} < -\sqrt{x_2^2 + 5}.$$

Από (1)+(2):  $x_1 - \sqrt{x_1^2 + 5} < x_2 - \sqrt{x_2^2 + 5} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A_1 = (-\infty, 0)$ , οπότε και 1-1.

Τότε το σύνολο τιμών της  $f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, -\sqrt{5})$ , αφού:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} \right) = (-\infty) \cdot 2 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - \sqrt{x^2 + 5}) = -\sqrt{5}.$$

Το  $-2017 \in f(A_1) = (-\infty, -\sqrt{5})$ , οπότε υπάρχει μοναδικό ( $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A_1 = (-\infty, 0)$ ), οπότε και 1-1)  $\xi \in (-\infty, 0)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = -2017$ .

$$\text{III. } f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5} = \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5})(x + \sqrt{x^2 + 5})}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{x^2 - x^2 - 5}{x + \sqrt{x^2 + 5}} = \frac{-5}{x + \sqrt{x^2 + 5}}.$$

IV. Έστω  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  (3). Τότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 5 < x_2^2 + 5 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 5} < \sqrt{x_2^2 + 5} \quad (4)$$

$$\text{Από (3)+(4): } x_1 + \sqrt{x_1^2 + 5} < x_2 + \sqrt{x_2^2 + 5} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 5}} > \frac{1}{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 5}} \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 5}} < \frac{-5}{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 5}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A_2 = (0, +\infty)$ , οπότε και 1-1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = 6f(x) - f(1) - 3f(2) - 2f(3)$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[1, 3]$  και γνησίως αύξουσα.

Είναι:

$$h(1) = 6f(1) - f(1) - 3f(2) - 2f(3) = 5f(1) - 3f(2) - 2f(3) = 3f(1) + 2f(1) - 3f(2) - 2f(3) = \\ = 3(f(1) - f(2)) + 2(f(1) - f(3)) < 0 \quad \text{και}$$

$$h(3) = 6f(3) - f(1) - 3f(2) - 2f(3) = 4f(3) - 3f(2) - f(1) = 3f(3) + f(3) - 3f(2) - f(1) = \\ = 3(f(3) - f(2)) + (f(3) - f(1)) > 0$$

$$\text{Διότι: } 1 < 2 < 3 \quad \overset{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \quad f(1) < f(2) < f(3).$$

Άρα  $h(1)h(3) < 0$ , οπότε ισχύει το Θ. Bolzano και θα υπάρχει μοναδικό ( $h$ : γνησίως

αύξουσα, άρα και 1-1)  $x_0 \in (1, 3)$  τέτοιο ώστε  $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{f(1) + 3f(2) + 2f(3)}{6}$ .

## Άσκηση 22.

Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και ισχύει  $f^2(x) - 4xf(x) = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2x$  διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Αν  $f(0) = -1$ , τότε:

- Να δείξετε ότι:  $f(x) = 2x - \sqrt{1+4x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = c$ , με  $c > 0$  είναι αδύνατη.

### Λύση

$$\alpha) \text{ Ισχύει } f^2(x) - 4x \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 4x \cdot f(x) + 4x^2 = 1 + 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - 2x)^2 = 1 + 4x^2 \Leftrightarrow g^2(x) = 1 + 4x^2 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επιπλέον η  $g$  είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β) i. Είναι  $g(0) = f(0) - 0 = f(0) = -1 < 0$  και αφού η  $g$  διατηρεί σταθερό πρόσημο, θα είναι  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έτσι από την εξίσωση  $g^2(x) = 1 + 4x^2$  προκύπτει  $g(x) = -\sqrt{1+4x^2} \Leftrightarrow$

$$f(x) - 2x = -\sqrt{1+4x^2} \Leftrightarrow f(x) = 2x - \sqrt{1+4x^2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii. Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0), \text{ διότι:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x - \sqrt{1+4x^2} \right) =$$

Για την αναζήτηση του  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  θεωρούμε ότι  $x \in (-\infty, 0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x - \sqrt{x^2 \left( \frac{1}{x^2} + 4 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x + x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} \right) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} \right) = 2 + \sqrt{0+4} = 4 \text{ και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - \sqrt{1+4x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{1+4x^2}) \cdot (2x + \sqrt{1+4x^2})}{(2x + \sqrt{1+4x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\left(2x + \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 4\right)}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}} \right) = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Για την αναζήτηση του  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  θεωρούμε ότι  $x \in (0, +\infty)$ .

Αφού το  $c > 0$ , δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$  και η εξίσωση  $f(x) = c$ , με  $c > 0$  είναι αδύνατη.

### Άσκηση 23.

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  συνεχείς στο  $[0,1]$  για τις οποίες ισχύουν τα εξής :

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-3}{x-1} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = 0$  και
- $0 \leq g(x) \leq 3$  για κάθε  $x \in [0,1]$

α) Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} = 0$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  ώστε  $f(x_0) = 2$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in [0,1]$  ώστε  $(2x_1 - 1)f(x_1) = g(x_1)$ .

δ) Αν επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως μονότονη, να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(1-x)$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0,1)$ .

### Λύση

α) Έστω  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \subseteq [0,1]$ . Τότε είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(\eta\mu x)}{x} \cdot \frac{x}{\eta\mu x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(\eta\mu x)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} \right] = 0 \cdot 1 = 0. \quad (\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1)$$

β) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ .

Για τον υπολογισμό του  $f(1)$  έχουμε : Θέτω  $h(x) = \frac{f(x)-3}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = h(x)(x-1) + 3$ , για  $x \neq 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (h(x)(x-1) + 3) = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 1$ , άρα  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ . (1)

Για τον υπολογισμό του  $f(0)$  έχουμε :

Από το α) ερώτημα έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} = 0$ .

Θέτοντας  $\eta\mu x = u$  (με  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  όπου  $u = \eta\mu x > 0$ ) και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$ , έχουμε  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 0$ .

Στη συνέχεια θέτουμε  $\phi(u) = \frac{f(u)}{u} \Leftrightarrow f(u) = u \cdot \phi(u)$ ,  $u > 0$ .



Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο μηδέν, είναι  $f(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = 0$ . (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι  $f(0) \neq f(1)$  και για τον αριθμό  $\eta = 2$  έχουμε  $f(0) < \eta < f(1)$ . Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  ώστε  $f(x_0) = 2$ .

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $k(x) = (2x - 1)f(x) - g(x)$ ,  $x \in [0,1]$ .

Η  $k$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- $k(0) = -f(0) - g(0) = -g(0) \leq 0$
- $k(1) = f(1) - g(1) = 3 - g(1) \geq 0$  (Αφού  $0 \leq g(x) \leq 3$  για κάθε  $x \in [0,1]$ )

Άρα είναι  $k(0) \cdot k(1) \leq 0$ .

- ο Αν  $k(0) \cdot k(1) < 0$ , τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (0,1)$  ώστε  $k(x_1) = 0$ .
- ο Αν  $k(0) \cdot k(1) = 0$  τότε είναι  $k(0) = 0$  ή  $k(1) = 0$ .

Τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in [0,1]$  ώστε  $k(x_1) = 0 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)f(x_1) = g(x_1)$ .

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $t(x) = f(x) - f(1-x)$ ,  $x \in [0,1]$ .

Η  $t$  είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- $t(0) = f(0) - f(1) = -3 < 0$
- $t(1) = f(1) - f(0) = 3 > 0$

Άρα είναι  $t(0) \cdot t(1) < 0$ . Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $t(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1-x)$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$ . Η ρίζα είναι μοναδική γιατί η συνάρτηση  $t$  είναι γνησίως αύξουσα.

Μονοτονία της  $t(x) = f(x) - f(1-x)$ :

Αρχικά έχουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα διότι γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως μονότονη και για  $0 < 3$  είναι  $f(0) = 0 < 3 = f(1)$ .

Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in [0,1]$  με  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$  (3)

Και  $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \xrightarrow{f: \gamma\gamma. \sigma\acute{\upsilon}\xi.} f(1-x_1) > f(1-x_2) \Leftrightarrow -f(1-x_1) < -f(1-x_2)$  (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3) και (4) και προκύπτει

$f(x_1) - f(1-x_1) < f(x_2) - f(1-x_2) \Leftrightarrow t(x_1) < t(x_2)$ .