

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

[Ενότητα Προσδιορισμός των Τοπικών Ακροτάτων - Θεώρημα Εύρεση Τοπικών Ακροτάτων του κεφ.2.7 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^2 \ln x - 1.$

ii. $g(x) = \frac{(x-1)^3}{e^x}.$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο A .

Έχουμε:

$$f'(x) = (x^2 \ln x - 1)' = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1), \quad x > 0.$$

Οπότε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Επομένως:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{και} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της f' .

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

min

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$.

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ το $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2e} - 1$.

ii. Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε:

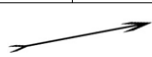
$$g'(x) = \left[\frac{(x-1)^3}{e^x} \right]' = \frac{\left[(x-1)^3 \right]' e^x - (x-1)^3 (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{3(x-1)^2 e^x - (x-1)^3 e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2 e^x [3 - (x-1)]}{(e^x)^2} = \frac{(x-1)^2 (4-x)}{e^x}.$$

Οπότε :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 (4-x)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της g'

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	0	-	
$g(x)$							

max

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[4, +\infty)$.

Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 4$ το $g(4) = \frac{(4-1)^3}{e^4} = \frac{27}{e^4}$.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα Δ , τότε από το πρόσημο της f' βρίσκουμε τη μονοτονία της f . Στα σημεία στα οποία $f'(x) = 0$, εκατέρωθεν των οποίων η f' αλλάζει πρόσημο παρουσιάζει ακρότατα η f .

Παράδειγμα 2.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 5$

ii. $g(x) = (x-3)e^x - \frac{x^2}{2} + 2x$

iii. $\varphi(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in [0, \pi)$

iv. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ -\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

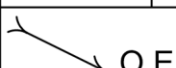
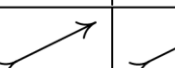
Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+3) = 0. \text{ Άρα } x = 0 \text{ (διπλή)} \text{ ή } x = -3.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+3) > 0. \text{ Άρα } x > -3 \text{ και } x \neq 0.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
f'(x)	-		+		+
f(x)	 O.E. 				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -3]$.

Έχει ολικό ελάχιστο για $x = -3$, το $f(-3) = -32$.

ii. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g'(x) = e^x + (x-3) \cdot e^x - x + 2 = (x-2) \cdot e^x - (x-2) = (x-2)(e^x - 1).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 0.$$

Για το πρόσημο της $g'(x)$, τη μονοτονία και τα ακρότατα της g έχουμε τον πίνακα:
 $(x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ και } e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0)$

X	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x-2$	-		-	+
$e^x - 1$	-		+	+
$g'(x)$	+		-	+
$g(x)$				

Η g είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.

Έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$, το $g(0) = -3$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 2$, το $g(2) = 2 - e^2$.

iii. Η φ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{(\eta\mu x)' \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu x \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x)'}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu^2 x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \\ &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} > 0, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi). \text{ Άρα η } \varphi \text{ είναι γνησίως αύξουσα.} \end{aligned}$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	0	π
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$	O.E.	

Άρα έχει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $\varphi(0) = 0$.

iv. Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Είναι συνεχής για $x < 1$, ως πολυωνυμική και για $x > 1$ ως λογαριθμική.

Επίσης ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-\ln x) = 0$ και $h(1) = 0$.

Άρα η h είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

Για $x < 1$, $h'(x) = 2x$ και για $x > 1$, $h'(x) = -\frac{1}{x}$.

Η συνάρτηση h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln x}{x - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = -k'(1) = -1, \text{ όπου } k(x) = \ln x.$$

$$\text{Άρα } h'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ -\frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $h'(x) = -\frac{1}{x} < 0$ για $x > 1$,

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και}$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-		+	-
$h(x)$				

T.E. T.M.

Παρατηρούμε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$, γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και έχει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, το $h(0) = -1$ και τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $h(1) = 0$.

Μεθοδολογία

- Για τη μελέτη τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f εφαρμόζουμε τα εξής:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Εξετάζουμε αν αυτή είναι συνεχής.

3. Βρίσκουμε την παράγωγο της f .
4. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
5. Βρίσκουμε το πρόσημο της f' , λύνοντας την ανίσωση $f'(x) > 0$.
6. Φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει: το πεδίο ορισμού, τα σημεία ασυνέχειας, τα σημεία που η f δεν είναι παραγωγίσιμη*, τις ρίζες της f' , το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f σε κάθε διάστημα.

* Τα σημεία που η f δεν είναι παραγωγίσιμη είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων. Σύμφωνα με το θεώρημα, δεν μας ενδιαφέρει αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 αλλά να είναι συνεχής σ' αυτό και να αλλάζει το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0 . Έτσι, η αναφορά μας στα σημεία που η f' δεν ορίζεται είναι τυπική και γίνεται μόνο για τη σωστή παρουσίαση των συμπερασμάτων στον πίνακα μονοτονίας της f .

7. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα της σελ. 262 του σχολικού βιβλίου
- Για τη μελέτη ολικών ακροτάτων έχουμε τα εξής:
 1. Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε ανοικτό διάστημα και έχει μόνο ένα ακρότατο τότε αυτό είναι ολικό.
 2. Αν η f είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) σε διάστημα της μορφής $[\alpha, +\infty)$ ή $[\alpha, \beta)$, τότε έχει ελάχιστο (μέγιστο) το $f(\alpha)$.
 3. Αν η f είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta]$ ή $(\alpha, \beta]$, τότε έχει μέγιστο (ελάχιστο) το $f(\beta)$.
 4. Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$, τότε εφαρμόζουμε το σχόλιο στη σελ. 264 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x^3 - x - 6}{x}$.

- i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$.
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x = x$ είναι αδύνατη για $x > 1$.

Λύση

- i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο A .

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = \left(\frac{\ln x^3 - x - 6}{x} \right)' = \frac{(3 \ln x - x - 6)' x - (3 \ln x - x - 6)(x)'}{x^2} =$$

$$\frac{\left(\frac{3}{x} - 1 \right) x - (3 \ln x - x - 6)}{x^2} = \frac{3 - x - 3 \ln x + x + 6}{x^2} =$$

$$\frac{9 - 3 \ln x}{x^2} = \frac{3(3 - \ln x)}{x^2}, \quad x > 0.$$

$$\text{Οπότε: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3(3 - \ln x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3(3 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$$

$$\text{Επομένως: } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^3 \quad \text{και} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e^3.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e^3]$ και γνησίως φθίνουσα στο

$$[e^3, +\infty). \text{ Παρουσιάζει μέγιστο για } x = e^3 \text{ το } f(e^3) = \frac{\ln(e^3)^3 - e^3 - 6}{e^3} = \frac{3 - e^3}{e^3}.$$

- ii. Επειδή η f έχει μέγιστο για $x = e^3$ το $f(e^3) = \frac{3 - e^3}{e^3} < 0$, έχουμε:

$$f(x) \leq f(e^3) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{3 - e^3}{e^3} < 0, \quad \text{άρα } f(x) < 0.$$

iii. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$$\frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x = x \Leftrightarrow \frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x - x = 0.$$

$$\text{Θέτουμε συνάρτηση } g(x) = \frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x - x.$$

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής.

Έχουμε:

$$g'(x) = \left[\frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x - x \right]' = \frac{3 \ln x}{x} - \frac{6}{x} - 1 = \frac{\ln x^3 - 6 - x}{x} = f(x).$$

Από το προηγούμενο υποερώτημα έχουμε ότι $f(x) < 0$ άρα $g'(x) < 0$, που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\text{Επομένως για } x > 1 \text{ ισχύει } g(x) < g(1) \Leftrightarrow \frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x - x < -1.$$

$$\text{Άρα } \frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x - x < 0 \text{ για κάθε } x > 1.$$

$$\text{Συνεπώς η εξίσωση } \frac{3(\ln x)^2}{2} - 6 \ln x = x \text{ είναι αδύνατη για } x > 1.$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει μέγιστο το $f(x_0) < 0$, (ή ελάχιστο το $f(x_0) > 0$) τότε $f(x) < 0$ (ή $f(x) > 0$ αντίστοιχα).

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη για $x > x_0$ με $x_0 \in D_g$ και την g γνησίως φθίνουσα (οπότε $g(x) < g(x_0)$ για κάθε $x > x_0$), αρκεί να δείξουμε ότι $g(x_0) < 0$.

Παράδειγμα 2.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν $2x^4 + \frac{8}{3}x^3 - f^3(x) = 5f(x) + \frac{(x^2 - 1)^2}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ακρότατα και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακρότατων.

Λύση

Από τη σχέση που μας έχει δοθεί παραγωγίζοντας έχουμε:

$$8x^3 + 8x^2 - 3f^2(x)f'(x) = 5f'(x) + 2x(x^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$(3f^2(x) + 5)f'(x) = 8x^2(x + 1) - 2x(x + 1)(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x(x + 1)(3x + 1)}{3f^2(x) + 5}.$$

Οπότε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x + 1)(3x + 1)}{3f^2(x) + 5} = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 1)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της f' .

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$		
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)							
	$\tau.\varepsilon.$		$\tau.\mu.$		$\tau.\varepsilon.$		

Άρα η f παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στις θέσεις $x = -1$ και $x = 0$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x = -\frac{1}{3}$.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συναρτησιακή σχέση (ισότητα) για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, και θέλουμε να δείξουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατα και να βρούμε τις θέσεις των ακρότατων, τότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας και λύνοντας ως προς $f'(x)$ βρίσκουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η f' και εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει το πρόσημο της, τα οποία είναι και οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & , \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \ln(x^2 - 4x + 5) + x - 2 & , \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$.

- i. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
- ii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f και να δείξετε ότι $\ln(x^2 - 4x + 5) + x - 5 - \ln 10 \leq 0$ για $2 < x \leq 5$.

Λύση

- i. Η f είναι παραγωγίσιμη για $-1 \leq x < 2$ και για $2 < x \leq 5$.
Στο σημείο $x_0 = 2$ αρκεί να εξετάσουμε τη συνέχεια της f :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 4) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [\ln(x^2 - 4x + 5) + x - 2] = \ln 1 + 2 - 2 = 0.$$

Επίσης έχουμε $f(2) = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

- Για $-1 \leq x < 2$ έχουμε:

$$f'(x) = (-x^2 + 4)' = -2x, \text{ οπότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (δεκτή),}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0) \text{ και } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2).$$

- Για $2 < x \leq 5$ έχουμε:

$$f'(x) = [\ln(x^2 - 4x + 5) + x - 2]' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} + 1 =$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 4x + 5},$$

οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 4x + 5} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (απορρίπτεται) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 5]$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	-1	0	2	5					
f'(x)		+	0	-	;	+			
f(x)		3		4		0		ln10+3	
	τ.ε.	τ.μ.	τ.ε.	τ.μ.					

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[2, 5]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$ και παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα για $x = -1$ το $f(-1) = 3$, για $x = 2$ το $f(2) = 0$ και τοπικά μέγιστα για $x = 0$ το $f(0) = 4$, για $x = 5$ το $f(5) = \ln 10 + 3$.

- ii. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-1, 5]$. Στα κρίσιμα σημεία της f και στα άκρα του διαστήματος $[-1, 5]$, η f έχει τιμές:

$$f(-1) = 3, f(2) = 0, f(0) = 4 \text{ και } f(5) = \ln 10 + 3.$$

Επειδή $\ln 10 + 3 > 4 \Leftrightarrow \ln 10 > 1 \Leftrightarrow \ln 10 > \ln e \stackrel{\ln x \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} 10 > e$, η μέγιστη τιμή της f στο $[-1, 5]$ είναι ίση με $\ln 10 + 3$ και παρουσιάζεται για $x = 5$, ενώ η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται για $x = 2$.

Επειδή η f για $x = 5$ παρουσιάζει μέγιστο, στο διάστημα $(2, 5]$ θα ισχύει :

$$f(x) \leq f(5) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4x + 5) + x - 2 \leq \ln 10 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 - 4x + 5) + x - 5 - \ln 10 \leq 0$$

Μεθοδολογία

- Όταν μας δίνεται συνάρτηση f διπλού τύπου για την εύρεση τοπικού ακρότατου στο σημείο x_0 που αλλάζει τύπο η f , δεν μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα αλλά μόνο η συνέχεια στο x_0 και η μονοτονία της f πριν και μετά το x_0 .
- Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η μεγαλύτερη από τις τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα α, β είναι η μέγιστη τιμή της f και η μικρότερη από αυτές η ελάχιστη τιμή της f .
- Αν η f παρουσιάζει μέγιστο στο $[\alpha, \beta]$ για $x = x_0$, τότε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$ όπου $\Delta \subseteq [\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 4x^2 + 1$.

- i. Να δείξετε ότι έχει μέγιστο.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = 2x^2 - \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη.

Λύση

- i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.
Η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 8x = \frac{2-8x^2}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-8x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2-8x^2 = 0, \text{ που ισχύει για } x = \frac{1}{2}, \text{ αφού } x > 0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-8x^2}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2-8x^2 > 0, \text{ που ισχύει για } 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{array}{c} + \\ \circ \end{array}$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$ O.M. $\searrow$		

Η f έχει μέγιστο για $x = \frac{1}{2}$, το $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln \frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = -2\ln 2 < 0$.

- ii. Είναι $\ln x = 2x^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\ln x - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η f έχει μέγιστο το $-2\ln 2$. Άρα ισχύει $f(x) \leq -2\ln 2 < 0$, για κάθε $x > 0$. Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη. Το ίδιο ισχύει και για την αρχική εξίσωση, με την οποία είναι ισοδύναμες.

Μεθοδολογία

- ii. Για να δείξουμε ότι μία εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο τον θετικό αριθμό μ ή μέγιστο τον αρνητικό αριθμό M δηλαδή ότι ισχύει $f(x) \geq \mu > 0$, για κάθε $x \in D_f$ ή $f(x) \leq M < 0$, για κάθε $x \in D_f$.

Παράδειγμα 5.

- i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$.

- ii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = (x-1)e^x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$.

Λύση

- i. Η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

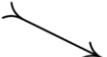
$$f'(x) = e^x - 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		O.E.	

Έχει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.

- ii. Η συνάρτηση $g(x) = (x-1)e^x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$g'(x) = (x-1)'e^x + (x-1) \cdot (e^x)' - x^2 - x = e^x + xe^x - e^x - x^2 - x =$$

$$xe^x - x^2 - x = x(e^x - x - 1) \stackrel{(\alpha)}{=} x \cdot f(x)$$

Άρα:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $f(x) = 0$. Άρα $x = 0$ (αφού από το (i) ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x = 0$)

f : γν. φθίν.
 Αν $x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, οπότε,
 $x \cdot f(x) < 0$ ή $g'(x) < 0$.

f : γν. αύξ.
 Αν $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, οπότε,
 $x \cdot f(x) > 0$ ή $g'(x) > 0$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g
 φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

Για το πρόσημο της g έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$			

g : γν. φθίν.
 $x < 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0$ και
 g : γν. αύξ.
 $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0$.

Άρα $g(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

Μεθοδολογία

Για να μελετήσουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης, πρώτα μελετάμε τη μονοτονία και τα ακρότατά της και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον ορισμό της μονοτονίας στα διάφορα διαστήματα του πεδίου ορισμού.

Βέβαια, η μελέτη του προσήμου με αυτόν τον τρόπο γίνεται όταν το ακρότατο ισούται με μηδέν.

Παράδειγμα 6.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x + x - \frac{x^2}{2}$ έχει ακριβώς μία θέση μεγίστου στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Η $f'(x) = \sigma \upsilon \nu x + 1 - x$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$f'(0) = \sigma \upsilon \nu 0 + 1 - 0 = 2 > 0 \text{ και } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2 - \pi}{2} < 0.$$

$$\text{Δηλαδή } f'(0) \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Επίσης, } f''(x) = -\eta \mu x - 1 < 0, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Άρα η } f'(x) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Οπότε η ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι μοναδική, και έστω x_0 η ρίζα αυτή στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Τότε έχουμε: } 0 < x < x_0 \xRightarrow{f': \text{ γν. φθίν.}} f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\text{και } x_0 < x < \frac{\pi}{2} \xRightarrow{f': \text{ γν. φθίν.}} f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f έχει ακριβώς μία θέση μεγίστου στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση f έχει ακριβώς μία θέση ακροτάτου στο (α, β) , πρώτα εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την f' και αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) . Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αυτή η ρίζα είναι μοναδική και ότι αλλάζει το πρόσημο της f' , εκατέρωθεν της ρίζας, χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της f' .

Παράδειγμα 7.

Να αποδείξετε ότι $2x^2 \ln x \geq 3x^2 - e^2$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

Η ανισότητα ισοδύναμα γράφεται $2x^2 \ln x - 3x^2 + e^2 \geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2x^2 \ln x - 3x^2 + e^2$, $x > 0$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$h'(x) = 4x \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} - 6x = 4x(\ln x - 1)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x(\ln x - 1) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
$h(x)$	O.E.		

Η h έχει ελάχιστο για $x = e$, το

$$h(e) = 2e^2 \ln e - 3e^2 + e^2 = 0.$$

Άρα ισχύει $h(x) \geq h(e) \Rightarrow h(x) \geq 0$, για κάθε $x > 0$.

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε μια ανισοϊσότητα της μορφής $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) \leq g(x)$, συνήθως θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και αποδεικνύουμε ότι αυτή έχει ακρότατο. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ακροτάτου και κατασκευάζουμε την ανισοϊσότητα.

Παράδειγμα 8.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2}{e^x}$.

β) Να αποδείξετε ότι $x^2 \leq 8e^{x-2}$ για κάθε $x > 0$.

Λύση

α) Είναι $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4xe^x - 2x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{4x - 2x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 2x^2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 4x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ και}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 2x^2}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 4x - 2x^2 > 0 \text{ που ισχύει για } 0 < x < 2.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	○	+	○	-
$f(x)$					
		T.Ε.	T.Μ.		

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$.

Επίσης, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$ και τοπικό μέγιστο για $x = 2$ το

$$f(2) = \frac{8}{e^2}.$$

β) Αφού η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = 2$ το $f(2) = \frac{8}{e^2}$, θα ισχύει

$$f(x) \leq \frac{8}{e^2} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{e^x} \leq \frac{8}{e^2} \Leftrightarrow x^2 \leq 4e^{x-2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μεθοδολογία

Για την απόδειξη ανισοϊσοτήτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο ορισμός του τοπικού ακροτάτου.

Μελετάμε κατάλληλη συνάρτηση f ως προς τα τοπικά ακρότατά της και στη συνέχεια επιλέγουμε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και εφαρμόζουμε τον ορισμό του τοπικού ακροτάτου. Θυμίζουμε ότι αν η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ενώ αν η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

Δίνονται τα σημεία $A(2, -\kappa), B(\kappa+1, 3)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η απόσταση των σημείων (AB) να είναι ελάχιστη, καθώς και την απόσταση αυτή.
- ii. Αν $\kappa = -1$ να βρείτε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB και να αποδείξετε ότι είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu x + 1$.

Λύση

i. Η απόσταση των δύο τυχαίων σημείων $A(2, -\kappa), B(\kappa+1, 3)$, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(\kappa) = \sqrt{(3+\kappa)^2 + (\kappa-1)^2} = \sqrt{2\kappa^2 + 4\kappa + 10}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, οπότε έχουμε

$$f'(\kappa) = \left(\sqrt{2\kappa^2 + 4\kappa + 10} \right)' = \frac{(2\kappa^2 + 4\kappa + 10)'}{2\sqrt{2\kappa^2 + 4\kappa + 10}} = \frac{4\kappa + 4}{2\sqrt{2\kappa^2 + 4\kappa + 10}}$$

$$f'(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \frac{4\kappa + 4}{2\sqrt{2\kappa^2 + 4\kappa + 10}} = 0 \Leftrightarrow 4\kappa + 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της f' .

κ	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(\kappa)$	$-$	0	$+$
$f(\kappa)$			

min

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $\kappa = -1$ το $f(-1) = \sqrt{2(-1)^2 + 4(-1) + 10} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Επομένως για $\kappa = -1$ έχουμε την ελάχιστη απόσταση των σημείων A, B που είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

ii. Για $\kappa = -1$ έχουμε τα σημεία $A(2, 1), B(0, 3)$, με συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB :

$$\lambda_{AB} = \frac{3-1}{0-2} = -1 \text{ και μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB το σημείο } M(1, 2).$$

Οπότε η μεσοκάθετος του AB έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y - 2 = -\frac{1}{\lambda_{AB}}(x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1$.

Τα κοινά σημεία της (ε) με την C_g δίνονται από τη λύση της εξίσωσης:

$$x + 1 = \eta\mu x + 1 \Leftrightarrow x = \eta\mu x.$$

Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ είναι μια προφανή ρίζα της εξίσωσης.

Θέτουμε συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x - x$.

Έχουμε: $h'(x) = (\eta\mu x - x)' = \sigma\upsilon\nu x - 1$.

Επειδή $h'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $\eta\mu x = x$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Επίσης $g'(x) = (\eta\mu x + 1)' = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ με $g'(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ και $g(0) = 1$.

Οπότε η εφαπτομένης της C_g στο σημείο $\Gamma(0,1)$ έχει εξίσωση:

$$y - 1 = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1, \text{ δηλαδή η μεσοκάθετος } (\varepsilon) \text{ του AB.}$$

(2^{ος} τρόπος για την επίλυση της εξίσωσης $\eta\mu x = x$:

Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ είναι μια προφανή ρίζα της εξίσωσης.

Όπως γνωρίζουμε η εξίσωση $|\eta\mu x| = |x|$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν, (σχολικό βιβλίο σελίδα 52).

Άρα και η εξίσωση $\eta\mu x = x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.)

Μεθοδολογία

- Όταν μας δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ως συνάρτηση μιας παραμέτρου $(\kappa \in \mathbb{R})$ για να βρούμε την ελάχιστη απόσταση των εικόνων τους στο επίπεδο, αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(\kappa)$ η οποία ορίζεται από την απόσταση των σημείων A, B. Θυμίζουμε: $(AB) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$.
- Για να αποδείξουμε ότι η μεσοκάθετος (ε) του σταθερού ευθύγραμμου τμήματος AB είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης g , αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό κοινό σημείο της ε με την C_g στο οποίο η εφαπτομένη της C_g ταυτίζεται με την ε .

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $xf'(x) + 2f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $f(1) = 0$.

- Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να δείξετε ότι $x^{2e} \leq e^{x^2}$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

i. Είναι $xf'(x) + 2f(x) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (x^2 \cdot f(x))' = (\ln x)'$.

Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $x^2 \cdot f(x) = \ln x + c$ και επειδή για $x = 1$, το $f(1) = 0$, έχουμε $1^2 \cdot f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Επομένως $x^2 \cdot f(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.

- ii. Η f είναι συνεχής ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων και ισχύει

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot \ln x}{x^4} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1 - 2 \ln x > 0, \text{ δηλαδή}$$

$$0 < x < \sqrt{e}.$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
f'(x)	+	○	-
f(x)	O.M.		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \sqrt{e}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{e}, +\infty)$. Έχει

$$\text{μέγιστο για } x = \sqrt{e}, \text{ το } f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}.$$

iii. Επειδή η f έχει μέγιστο το $\frac{1}{2e}$, ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{2e}$, για κάθε $x > 0$.

$$\text{Άρα } \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2e \ln x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln x^{2e} \leq x^2 \Leftrightarrow x^{2e} \leq e^{x^2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μεθοδολογία

- i. Χρησιμοποιώντας την ισότητα που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση και την παράγωγό της, δημιουργούμε παράγωγο κατάλληλης συνάρτησης σε κάθε μέλος της ισότητας.

Έτσι υπολογίζουμε την άγνωστη συνάρτηση εφαρμόζοντας το πόρισμα, στη σελ. 251 του σχολικού βιβλίου.

- iii. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο παράδειγμα η απόδειξη της ανισοϊσότητας έγινε, αφού εκμεταλλευτήκαμε τον ορισμό του μεγίστου που έχει η συνάρτηση f η οποία μελετήθηκε σε προηγούμενο ερώτημα.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + e^x$, $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο.

β) Να δείξετε ότι $f(x_0) = (x_0 - 1) \ln x_0 - 1$, για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Η $f'(x) = \ln x + 1 + e^x$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επίσης,

είναι γνησίως αύξουσα διότι $f''(x) = \frac{1}{x} + e^x > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1 + e^x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 1 + e^x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f' είναι το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, το οποίο περιέχει τον αριθμό μηδέν, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0, +\infty)$, αφού επιπλέον η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Δηλαδή $f'(x_0) = 0$ (1)

Έχουμε: $0 < x < x_0 \xRightarrow{f': \text{γν. αύξ.}} f'(x) < f'(x_0) \xRightarrow{(1)} f'(x) < 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, x_0]$

και $x > x_0 \xRightarrow{f': \text{γν. αύξ.}} f'(x) > f'(x_0) \xRightarrow{(1)} f'(x) > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

β) Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = \ln x + 1 + e^x$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, ισχύει

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 + e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = -\ln x_0 - 1 \quad (2).$$

Τότε $f(x_0) = x_0 \ln x_0 + e^{x_0} \stackrel{(2)}{=} x_0 \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = (x_0 - 1) \ln x_0 - 1$.

Μεθοδολογία

α) Σχετικά με την απόδειξη της ύπαρξης μοναδικού σημείου x_0 στο οποίο μια συνάρτηση f να παρουσιάζει ακρότατο έχουμε αναφερθεί σε προηγούμενο παράδειγμα.

Θυμίζουμε ότι : για να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η g είναι γνησίως μονότονη και ότι το σύνολο τιμών της περιέχει τον αριθμό μηδέν.

Β) Αν θέλουμε να αποδείξουμε μια ισότητα που περιέχει μια τιμή $f(x_0)$ της παραγωγίσιμης συνάρτησης f και γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$, τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Fermat και μετά από πράξεις προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

Παράδειγμα 4.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{2x}$ και $g(x) = 2e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (0, 1)$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $h^2(x) = f(x)$ και $h(0) = 1$.

γ) Να δείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h στο $\Gamma(0, 2)$ είναι σημείο που έχει την ίδια τετμημένη με το $A(x_0, y_0)$.

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow e^{2x_0} - 2e^{x_0} + x_0 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = e^{2x} - 2e^x + x$, $x \in [0, 1]$.

Είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$\phi(0) = -1 < 0 \text{ και } \phi(1) = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2 > 0. \text{ Άρα } \phi(0) \cdot \phi(1) < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$\phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{2x_0} - 2e^{x_0} + x_0 = 0.$$

Επίσης έχουμε $\phi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$. (Αφού, αν θέσουμε $e^x = y$, γίνεται $2y^2 - 2y + 1 > 0$, διότι $\Delta = -4 < 0$ και $2 > 0$).

Άρα η συνάρτηση ϕ είναι γνησίως αύξουσα και γι' αυτό η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

β) Είναι $h^2(x) = f(x) = e^{2x} > 0$, οπότε $h(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η h είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα θα είναι $h(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) ή $h(x) = -e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2). Όμως έχουμε $h(0) = 1$, το οποίο επαληθεύεται μόνο από την (1).

Δηλαδή $h(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Οποιοδήποτε σημείο $M(x, e^x)$ της γραφικής παράστασης της h απέχει από το $\Gamma(0, 2)$,

$$\text{απόσταση } d(x) = (M\Gamma) = \sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση d είναι συνεχής ως τετραγωνική ρίζα συνεχούς συνάρτησης και παραγωγίσιμη με

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2}} \cdot (x^2 + (e^x - 2)^2)' = \frac{2x + 2(e^x - 2) \cdot e^x}{2\sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2}} = \frac{e^{2x} - 2e^x + x}{\sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2}} = \frac{\phi(x)}{\sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2}}$$

όπου $\phi(x)$ η συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στο α) ερώτημα.

Είναι $d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\phi(x)}{\sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2}} = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0$, που έχει μοναδική ρίζα το $x_0 \in (0,1)$, από το α) ερώτημα.

Επίσης $d'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\phi(x)}{\sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2}} > 0 \Leftrightarrow \phi(x) > 0$, (αφού $\sqrt{x^2 + (e^x - 2)^2} > 0$)

Η παραπάνω ανίσωση αληθεύει για $x > x_0$, αφού η ϕ είναι γνησίως αύξουσα.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$d'(x)$	-	○	+
$d(x)$	↘		↗

min

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση d έχει ελάχιστο για $x = x_0$, δηλαδή το σημείο της C_h που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $\Gamma(0,2)$ είναι ένα σημείο που έχει την ίδια τετμημένη με το A .

Μεθοδολογία

γ) Σε ορισμένες ασκήσεις ζητείται η ελάχιστη ή μέγιστη τιμή ενός μεγέθους ή ζητείται η τιμή ενός μεγέθους ώστε ένα άλλο μέγεθος να ελαχιστοποιηθεί ή να μεγιστοποιηθεί. Αυτά λέγονται **προβλήματα μέγιστης - ελάχιστης τιμής**.

Σ' αυτές τις ασκήσεις, συμβολίζουμε με κατάλληλες μεταβλητές τα δύο μεγέθη, βρίσκουμε την ισότητα με την οποία συνδέονται (συνάρτηση) και την μελετάμε ως προς τα ακρότατα.