

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΝΝΟΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ
[Κεφ. 2.1: Έννοια της Παραγώγου του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - \eta\mu x$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - x - \eta\mu x - 0}{x} = x - 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 - 1 - 1 = -2.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = -2$.

Άσκηση 2.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = (x+1)|x+1|$ στο σημείο $x_0 = -1$.

Λύση

Για $x \neq -1$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(x+1)|x+1| - 0}{x+1} = |x+1|, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} |x+1| = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = -1$ με $f'(-1) = 0$.

Άσκηση 3.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [1, +\infty)$.

Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x-1)\sqrt{x-1} - 0}{x-1} = \sqrt{x-1}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 0$

Άσκηση 4.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \sin^2 x$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin^2 x - 1}{x} = -\frac{1 - \sin^2 x}{x} = -\frac{\eta\mu^2 x}{x} = -\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right) = -1 \cdot 0 = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Άσκηση 5.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 + 1 - 1}{x} = \frac{x^3}{x} = x^2, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - \sin 0}{x} = \frac{\sin x - 0}{x}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x} = 0.$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Άσκηση 6.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x} - 0}{x} = x \eta \mu \frac{1}{x}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Πράγματι, για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left| x \eta \mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|,$$

οπότε

$$-|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Άσκηση 7.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-3|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

Λύση

Για $x \neq 3$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{|x-3|-0}{x-3} = \begin{cases} \frac{-(x-3)}{x-3}, & x < 3 \\ \frac{x-3}{x-3}, & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -1, & x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Για $x < 3$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1.$$

Για $x > 3$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1.$$

Είναι:

$$-1 = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 1.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

Άσκηση 8.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 5x|$ στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x) = -6 < 0$, άρα για x κοντά στο $x_0 = 2$ έχουμε:

$$x^2 - 5x < 0, \text{ οπότε } |x^2 - 5x| = -x^2 + 5x$$

Για x κοντά στο 2 έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{|x^2 - 5x| - 6}{x - 2} = \frac{-x^2 + 5x - 6}{x - 2} = \frac{-(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = -(x - 3) = 3 - x$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3 - x) = 1.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $|f(x)| \leq \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Για $x = 0$ έχουμε:

$$|f(0)| \leq 0, \text{ άρα } f(0) = 0 \quad (1).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$|f(x)| \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow -\eta\mu^2 x \leq f(x) \leq \eta\mu^2 x \quad (2).$$

Για κάθε $x < 0$ από (2) έχουμε:

$$\frac{-\eta\mu^2 x}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{\eta\mu^2 x}{x} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu^2 x}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{-\eta\mu^2 x}{x}.$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Για κάθε $x > 0$ από (2) έχουμε:

$$\frac{-\eta\mu^2 x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{-\eta\mu^2 x}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x}.$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Άσκηση 2.

Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $1+3x-x^2 \leq f(x) \leq xe^x+2x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Για $x=0$ έχουμε:

$$1 \leq f(0) \leq 1, \text{ άρα } f(0) = 1 \quad (1).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} 1+3x-x^2 \leq f(x) \leq xe^x+2x+1 &\Leftrightarrow 3x-x^2 \leq f(x)-1 \leq xe^x+2x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 3x-x^2 \leq f(x)-f(0) \leq xe^x+2x \Leftrightarrow x(3-x) \leq f(x)-f(0) \leq x(e^x+2) \quad (2). \end{aligned}$$

Για κάθε $x < 0$ η (2) γίνεται:

$$\frac{x(3-x)}{x} \geq \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq \frac{x(e^x+2)}{x} \Leftrightarrow e^x+2 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 3-x.$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 2) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (3-x) = 3$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 3$.

Για κάθε $x > 0$ η (2) γίνεται:

$$\frac{x(3-x)}{x} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq \frac{x(e^x+2)}{x} \Leftrightarrow 3-x \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq e^x+2.$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3-x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) = 3$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 3$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 3$.

Άσκηση 3.

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο $x_0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 1}$, με $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, οπότε $f(x) = (x - 1)g(x) + 2$.

Από υπόθεση είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x - 1)g(x) + 2) = 0 \cdot 3 + 2 = 2$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ισχύει $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, οπότε $f(1) = 2$ (1).

Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x) - 2}{x - 1}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 3$.

Άσκηση 4.

Αν η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 1|g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, αν και μόνο αν $g(1) = 0$.

Λύση

Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ισχύει $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (1).

Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^2 - 1|g(x)}{x - 1} = \begin{cases} \frac{(x^2 - 1)g(x)}{x - 1}, & x \leq -1 \text{ ή } x > 1 \\ \frac{-(x^2 - 1)g(x)}{x - 1}, & -1 < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} (x + 1)g(x), & x \leq -1 \text{ ή } x > 1 \\ -(x + 1)g(x), & -1 < x < 1 \end{cases}$$

οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-(x + 1)g(x)) \stackrel{(1)}{=} -2g(1) \quad (2) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x + 1)g(x)) \stackrel{(1)}{=} 2g(1) \quad (3).$$

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, τότε από (2) και (3) έπεται:

$$-2g(1) = 2g(1) \Leftrightarrow 4g(1) = 0 \Leftrightarrow g(1) = 0$$

- Αν $g(1) = 0$, τότε από (2) και (3) έπεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Δείξαμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν $g(1) = 0$.

Άσκηση 5.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x-2}, & x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 3}, & x \geq 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Αρχικά απαιτούμε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x-2} = \frac{\alpha + \beta}{1-2} = -\alpha - \beta$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{4} = 2$
- $f(1) = \sqrt{4} = 2$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Δηλαδή:

$$-\alpha - \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = -\alpha - 2 \quad (1)$$

Λόγω της (1) η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 - \alpha - 2}{x-2}, & x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Για $x < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{\frac{\alpha x^2 - \alpha - 2}{x-2} - 2}{x-1} = \frac{\frac{\alpha x^2 - \alpha - 2 - 2x + 4}{x-2}}{x-1} = \frac{\alpha x^2 - \alpha - 2x + 2}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{\alpha(x^2 - 1) - 2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(\alpha x + \alpha - 2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha x + \alpha - 2}{x-2}, \text{ οπότε} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x + \alpha - 2}{x - 2} = \frac{2\alpha - 2}{-1} = 2 - 2\alpha$$

Για $x > 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \\ &= \frac{x^2 + 3 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2}, \text{ οπότε} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Δηλαδή:

$$2 - 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{4},$$

οπότε από (1) έχουμε:

$$\beta = -\alpha - 2 = -\frac{3}{4} - 2 = -\frac{11}{4}.$$

Άσκηση 6.

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$, να αποδείξετε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha} = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha).$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$ (1).

Για $x \neq \alpha$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha} &= \frac{xf(\alpha) - \overbrace{\alpha f(\alpha) + \alpha f(\alpha)}^{\text{προσθαφαιρούμε}} - \alpha f(x)}{x - \alpha} = \\ &= \frac{xf(\alpha) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{\alpha f(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{x - \alpha}{x - \alpha} f(\alpha) - \alpha \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \\ &= f(\alpha) - \alpha \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(f(\alpha) - \alpha \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right) \stackrel{(1)}{=} f(\alpha) - \alpha f'(\alpha).$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $|xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$\begin{aligned} |xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4 &\Leftrightarrow |xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq |x|^4 \Leftrightarrow \frac{|xf(x) - \eta\mu^2 x|}{|x|} \leq |x|^3 \Leftrightarrow \left| \frac{xf(x) - \eta\mu^2 x}{x} \right| \leq |x|^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| f(x) - \frac{\eta\mu^2 x}{x} \right| \leq |x|^3 \Leftrightarrow -|x|^3 \leq f(x) - \frac{\eta\mu^2 x}{x} \leq |x|^3 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{x} - |x|^3 \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x} + |x|^3. \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x}{x} - |x|^3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} - |x|^3 \right) = 0 \cdot 1 - 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x}{x} + |x|^3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + |x|^3 \right) = 0 \cdot 1 + 0 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ισχύει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ οπότε $f(0) = 0$ (1).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$\begin{aligned} |xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4 &\Leftrightarrow |xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq |x|^4 \Leftrightarrow \frac{|xf(x) - \eta\mu^2 x|}{|x|^2} \leq |x|^2 \Leftrightarrow \left| \frac{xf(x) - \eta\mu^2 x}{x^2} \right| \leq x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq \frac{f(x)}{x} - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \leq x^2 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} - x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + x^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} - x^2 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + x^2. \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu^2 x}{x^2} - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 - x^2 \right) = 1^2 - 0 = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu^2 x}{x^2} + x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 + x^2 \right) = 1^2 + 0 = 1$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$.

Άσκηση 2.

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = \alpha$, να

αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 3h)}{h} = 5\alpha$.

Λύση άσκησης 16

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = \alpha$, οπότε ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \alpha \quad (1)$$

Για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 3h)}{h} &= \frac{f(x_0 + 2h) - \overbrace{f(x_0) + f(x_0)}^{\text{προσθαφαιρούμε}} - f(x_0 - 3h)}{h} = \\ &= \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} \stackrel{2h=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \omega) - f(x_0)}{\frac{\omega}{2}} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(2 \frac{f(x_0 + \omega) - f(x_0)}{\omega} \right) \stackrel{(1)}{=} 2f'(x_0) = 2\alpha.$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} \stackrel{-3h=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{\frac{t}{-3}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-3 \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \right) \stackrel{(1)}{=} -3f'(x_0) = -3\alpha.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 3h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 3h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= 2\alpha - (-3\alpha) = 5\alpha .$$

Άσκηση 3.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x)\sin 2y + f(y)\sin 2x$ (1).

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = \sin 2x_0$.

Λύση

Για $x=y=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ (2).

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ (3), οπότε ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0) \stackrel{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1 \quad (4).$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &\stackrel{(1)}{=} \frac{f(x_0)\sin 2h + f(h)\sin 2x_0 - f(x_0)}{h} = \\ &= \frac{f(x_0)\sin 2h - f(x_0)}{h} + \frac{f(h)\sin 2x_0}{h} = f(x_0) \frac{\sin 2h - 1}{h} + \frac{f(h)}{h} \sin 2x_0 \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) = f(x_0)$, αφού $f(x_0)$ σταθερά.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2\eta\mu^2 h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\eta\mu^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-2\eta\mu h \cdot \frac{\eta\mu h}{h} \right) = -2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$, από την (4).
- $\lim_{h \rightarrow 0} (\sin 2x_0) = \sin 2x_0$, αφού $\sin 2x_0$ σταθερά.

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x_0) \frac{\sin 2h - 1}{h} + \frac{f(h)}{h} \sin 2x_0 \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (\sin 2x_0) = \end{aligned}$$

$$= f(x_0) \cdot 0 + 1 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x_0 = \sigma\upsilon\nu 2x_0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = \sigma\upsilon\nu 2x_0$.

Άσκηση 4.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ (1).

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, με $f'(x_0) = \frac{2}{x_0}$.

Λύση

Για $x = y = 1$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ (2).

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$ (3), οπότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \stackrel{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2 \quad (4).$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = x_0 h$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow 1$ και έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x = x_0 h}{=} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x_0) + f(h) - f(x_0)}{x_0(h - 1)} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{f(h)}{h - 1}.$$

Είναι:

- $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$ αφού $\frac{1}{x_0}$ σταθερά
- $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h)}{h - 1} = 2$, από την (4)

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x_0} \cdot \frac{f(h)}{h - 1} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h)}{h - 1} = \frac{1}{x_0} \cdot 2 = \frac{2}{x_0}. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$ με $f'(x_0) = \frac{2}{x_0}$.

Άσκηση 5.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) > 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και
- $f(x-y) = \frac{f(x) + 2f(y) - 6}{f(y) - 2}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (2).

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = f(x_0) - 2$.

Λύση

$$\text{Για } x=y=0 \text{ από την (2) έχουμε } f(0) = \frac{3f(0)-6}{f(0)-2} \Leftrightarrow f(0) = \frac{3(f(0)-2)}{f(0)-2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(0) = 3 \quad (3).$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ (4), οπότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \stackrel{(3),(4)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 1 \quad (5)$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = x_0 - h$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow 0$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{x = x_0 - h}{=} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{x_0 - h - x_0} \stackrel{(2)}{=} \frac{\frac{f(x_0) + 2f(h) - 6}{f(h) - 2} - f(x_0)}{-h} = \\ &= \frac{f(x_0) + 2f(h) - 6 - f(x_0)f(h) + 2f(x_0)}{-h(f(h) - 2)} = \frac{3f(x_0) + 2f(h) - 6 - f(x_0)f(h)}{-h(f(h) - 2)} = \\ &= \frac{2(f(h) - 3) - f(x_0)(f(h) - 3)}{-h(f(h) - 2)} = \frac{(f(h) - 3)(2 - f(x_0))}{-h(f(h) - 2)} = \frac{f(x_0) - 2}{f(h) - 2} \cdot \frac{f(h) - 3}{h} \end{aligned}$$

Είναι:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα είναι και συνεχής σε αυτό, οπότε ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 3 \quad (6)$$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - 2}{f(h) - 2} \stackrel{(6)}{=} \frac{f(x_0) - 2}{3 - 2} = f(x_0) - 2$ αφού $f(x_0)$ σταθερά.

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 3}{h} = 1$, από την (5).

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0) - 2}{f(h) - 2} \cdot \frac{f(h) - 3}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - 2}{f(h) - 2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 3}{h} = f(x_0) - 2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = f(x_0) - 2$.

Άσκηση 6.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο α , με $f'(\alpha) = 2\alpha - 3$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 4$ (1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = 2x_0 - 3$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α με $f'(\alpha) = 2\alpha - 3$ (2), οπότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 2\alpha - 3 \quad (3)$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = x_0 + h - \alpha$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow \alpha$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{x = x_0 + h - \alpha}{=} \frac{f(x_0 + h - \alpha) - f(x_0)}{(x_0 + h - \alpha) - x_0} = \frac{f(h + (x_0 - \alpha)) - f(\alpha + (x_0 - \alpha))}{x_0 + h - \alpha - x_0} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{f(h) + f(x_0 - \alpha) + 2h(x_0 - \alpha) + 4 - f(\alpha) - f(x_0 - \alpha) - 2\alpha(x_0 - \alpha) - 4}{h - \alpha} = \\ &= \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} + \frac{2(h - \alpha)(x_0 - \alpha)}{h - \alpha} = \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} + 2x_0 - 2\alpha \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} = 2\alpha - 3$ από την (3).
- $\lim_{h \rightarrow \alpha} (2x_0 - 2\alpha) = 2x_0 - 2\alpha$, αφού $2x_0 - 2\alpha$ σταθερά.

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} + 2x_0 - 2\alpha \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} + \lim_{h \rightarrow \alpha} (2x_0 - 2\alpha) = 2\alpha - 3 + 2x_0 - 2\alpha = 2x_0 - 3. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 2x_0 - 3$.

Άσκηση 7.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\alpha > 0$, με $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(xy) = f(x) + f(y)$ (1), για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$, με $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha > 0$ με $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ (2), οπότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad (3).$$

Έστω $x_0 \in (0, +\infty)$, τότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = \frac{x_0 h}{\alpha}$ με $h > 0$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow \alpha$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{x = \frac{x_0 h}{\alpha}}{=} \frac{f\left(\frac{x_0 h}{\alpha}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0 h}{\alpha} - x_0} = \frac{f\left(\frac{x_0}{\alpha} h\right) - f\left(\frac{x_0}{\alpha} \alpha\right)}{\frac{x_0 h - \alpha x_0}{\alpha}} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) + f(h) - f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) - f(\alpha)}{\frac{x_0(h - \alpha)}{\alpha}} = \frac{\alpha}{x_0} \cdot \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{\alpha}{x_0} = \frac{\alpha}{x_0}$, αφού $\frac{\alpha}{x_0}$ σταθερά.
- $\lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} = \frac{1}{\alpha}$, από την (3).

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \left(\frac{\alpha}{x_0} \cdot \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{\alpha}{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} = \frac{\alpha}{x_0} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ με $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Άσκηση 8.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)^2 \quad (1).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i. $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- ii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 0$.

Λύση

- i. Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, οπότε εναλλάσσοντας τα x, y η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq (y - x)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -f(x) + f(y) &\leq (x - y)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -(x - y)^2 &\leq f(x) - f(y) \quad (2). \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} -(x - y)^2 &\leq f(x) - f(y) \leq (x - y)^2 \\ \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| &\leq (x - y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- ii. Για $x, x_0 \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq (x - x_0)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| &\leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} &\leq |x - x_0| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| &\leq |x - x_0| \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|.$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0,$$

οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 0$.

Άσκηση 9.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = \frac{1}{3}$. Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση g , με $g(x) = \sin \pi x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

1) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 0$.

2) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 2$ και να υπολογιστούν οι αριθμοί $f'(2)$ και $g'(2)$.

Λύση

1) Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Θέτουμε $\frac{f(x)}{x^2 - 4} = \varphi(x) \Rightarrow f(x) = (x^2 - 4) \cdot \varphi(x)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \frac{1}{3}$

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4) \cdot \varphi(x)] = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Άρα $f(2) = 0$.

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} (x + 2) \right] = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$. Άρα $f'(2) = \frac{4}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x \cdot f(x) - \sin 2\pi \cdot f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x \cdot f(x)}{x - 2} =$$

(και επειδή υπάρχουν τα επί μέρους όρια, έχουμε)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (\sin \pi x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 1 \cdot f'(2) = \frac{4}{3}. \text{ Άρα } g'(2) = \frac{4}{3}.$$