

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ
ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

[Κεφ. 2.2: Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις - Παράγωγος Συνάρτηση - Κεφ. 2.3:
Κανόνες Παραγωγίσιμης του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i. $f(x) = x^2 + x + 1, x_0 = 0.$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x} + x, x_0 = 1.$

iii. $f(x) = \ln|x-1|, x_0 = 2.$

iv. $f(x) = \eta\mu(x^2 - 1), x_0 = 1.$

v. $f(x) = \epsilon\phi 2x, x_0 = \frac{\pi}{6}.$

vi. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}, x_0 = 1.$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R}.$

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν πολυωνυμική με $f'(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Άρα $f'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [0, +\infty).$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ σαν πολυωνυμική με

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x} + x)' = \left(x^{\frac{1}{3}} + x\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 1.$$

$$\text{Άρα } f'(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

iii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

$$\text{Άρα } f'(2) = 1.$$

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2x \sin(x^2 - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \sin 0 = 0.$$

v. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \kappa \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 2x}$, $x \neq \kappa \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Ελέγχω αν το $\frac{\pi}{6} \in D_f$. Έστω ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$\frac{\pi}{6} = \kappa \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} = \frac{\kappa}{2} \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{6}$$

αδύνατο αφού το $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Έτσι το } \frac{\pi}{6} \in D_f. \text{ Άρα } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sin^2 2 \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

vi. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (0, +\infty)$.

Η f παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}$.

$$\text{Άρα } f'(1) = -\frac{2}{3}.$$

Άσκηση 2.

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{2 - \eta \mu x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

ii. $g(x) = \frac{x \ln x - 1}{e^x}$, $x_0 = 1$.

iii. $h(x) = e^{e^x}$, $x_0 = 0$.

iv. $\varphi(x) = \sigma \upsilon \nu x^2$, $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 1)'(2 - \eta \mu x) - (x^3 - 1)(2 - \eta \mu x)'}{(2 - \eta \mu x)^2} = \\ &= \frac{3x^2(2 - \eta \mu x) - (x^3 - 1)(-\sigma \upsilon \nu x)}{(2 - \eta \mu x)^2} = \\ &= \frac{3x^2(2 - \eta \mu x) + (x^3 - 1)\sigma \upsilon \nu x}{(2 - \eta \mu x)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3 \frac{\pi^2}{4} \left(2 - \eta \mu \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi^3}{8} - 1\right) \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{2}}{\left(2 - \eta \mu \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{3\pi^2}{4}$$

ii. Το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g = (0, +\infty)$, Η g είναι παραγωγίσιμη σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με.

$$g'(x) = \frac{(x \ln x - 1)'e^x - (x \ln x - 1)(e^x)'}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{(1 + \ln x)e^x - (x \ln x - 1)e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{1 + \ln x - x \ln x + 1}{e^x} =$$

$$\frac{2 + (1 - x) \ln x}{e^x}, \quad x > 0$$

Έτσι έχουμε:

$$g'(1) = \frac{2 + (1-1) \cdot \ln 1}{e^1} = \frac{2+0}{e} = \frac{2}{e}$$

iii. Θέτω $f(x) = e^x$.

Είναι $h = f \circ f$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = f'(f(x))f'(x) = [f'(e^x)](e^x)' = e^{e^x} e^x = e^{x+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Έτσι έχουμε:

$$h'(0) = e^{0+e^0} = e$$

iv. Το πεδίο ορισμού της φ είναι $D_\varphi = \mathbb{R}$.

Θέτω $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $\varphi = f \circ g$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η φ είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x) = f'(g(x))g'(x) = [f'(x^2)]2x = (-\eta\mu x^2)2x = -2x\eta\mu x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι έχουμε:

$$\varphi'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\eta\mu\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = -\sqrt{\pi}\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Άσκηση 3.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \eta\mu x + \epsilon\phi x$

ii. $f(x) = \frac{1 + \ln 2}{x^2 + 1}$

iii. $f(x) = e^x \cdot \eta\mu\alpha \cdot \sigma\phi x, \alpha \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\eta\mu x}$

v. $f(x) = x^2 \cdot \epsilon\phi x \cdot \ln x$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (\eta\mu x)' + (\epsilon\phi x)' = \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{-(1 + \ln 2)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x(1 + \ln 2)}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

iii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi / \kappa \in \mathbb{Z} \}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \eta\mu\alpha \left[e^x \sigma\phi x + e^x (\sigma\phi x)' \right] =$$

$$= \eta\mu\alpha \left[e^x \sigma\phi x + e^x \left(-\frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) \right] =$$

$$e^x \eta\mu\alpha \left(\sigma\phi x - \frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) = \frac{e^x \eta\mu\alpha (\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x - 1)}{\eta\mu^2 x}, \quad x \neq \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [0, +\infty) - \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{-(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}, \quad x \geq 0 \text{ και } x \neq \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

v. Το πεδίο ορισμού της f είναι

$$D_f = (0, +\infty) - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (x^2)' \varepsilon\phi x \cdot \ln x + x^2 (\varepsilon\phi x)' \ln x + x^2 \varepsilon\phi x (\ln x)' =$$

$$= 2x \cdot \varepsilon\phi x \cdot \ln x + \frac{x^2 \ln x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{x^2 \varepsilon\phi x}{x} =$$

$$= 2x \cdot \varepsilon\phi x \cdot \ln x + \frac{x^2 \ln x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + x \cdot \varepsilon\phi x, \quad x > 0 \text{ και } x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 4.

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f + g$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}, g(x) = x^{\frac{2}{3}}.$

ii. $f(x) = x^{\frac{1}{4}}, g(x) = x^{\frac{2}{5}}.$

iii. $f(x) = x^2 - \sqrt{x}, g(x) = x^{\frac{1}{2}}.$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [0, +\infty).$

Το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g = [0, +\infty).$

Είναι $D_{f+g} = [0, +\infty).$

Η f παραγωγίζεται στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$

Η g παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$

Έτσι η $f + g$ παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \quad x > 0.$$

Θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της $f + g$ στο 0.

Η f παραγωγίζεται στο 0, ενώ η g δεν παραγωγίζεται στο 0, τότε η $f + g$ δεν παραγωγίζεται στο 0. Γιατί αν η $f + g$ παραγωγιζόταν στο 0 τότε η συνάρτηση $g = (f + g) - f$ θα ήταν παραγωγίσιμη στο 0 σαν διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Αυτό είναι άτοπο.

Έτσι έχουμε:

$$(f + g)'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \quad x > 0$$

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [0, +\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g = [0, +\infty)$.

Είναι $D_{f+g} = [0, +\infty)$.

Η f παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$.

Η g παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$.

Έτσι η $f + g$ παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}, \quad x > 0$$

Θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της $f + g$ στο 0.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(0)}{x} &= \frac{f(x) + g(x) - f(0) - g(0)}{x} = \\ &= \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} + x^{\frac{2}{5}}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x} + \frac{x^{\frac{2}{5}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \right) = +\infty$$

Έτσι έχουμε:

$$(f + g)'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}, \quad x > 0$$

iii. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα είναι $D_f = [0, +\infty)$ και $D_g = [0, +\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f + g$ είναι $D_{f+g} = [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - \sqrt{x} + x^{\frac{1}{2}} = x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{x} = x^2$.

- Η συνάρτηση $f + g$ παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με $(f + g)'(x) = (x^2)' = 2x$.
- Εξετάζουμε αν η συνάρτηση $f + g$ παραγωγίζεται στο 0.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(0)}{x} = \frac{x^2}{x} = x$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Άρα η συνάρτηση $f + g$ παραγωγίζεται στο 0.

Επομένως:

$$(f + g)'(x) = 2x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Σχόλιο: Τα συμπεράσματα που βγαίνουν από την παραπάνω άσκηση είναι τα εξής:

- Αν f παραγωγίζεται στο x_0 και η g δεν παραγωγίζεται στο x_0 τότε η $f + g$ δεν παραγωγίζεται στο x_0 .
- Αν οι f, g δεν παραγωγίζονται στο x_0 τότε δεν γνωρίζουμε αν η $f + g$ παραγωγίζεται στο x_0 .

Άσκηση 5.

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x) = \eta\mu(\eta\mu\sqrt{x}), x \geq 0$

ii. $f(x) = (x-1)^{x\eta\mu x}, x > 1$

iii. $f(x) = \log_{x-1}(\eta\mu x), x \in (1, 2) \cup (2, \pi)$

iv. $f(x) = 3^{3^x}, x \in \mathbb{R}$

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sigma\upsilon\nu(\eta\mu\sqrt{x})(\eta\mu\sqrt{x})' = \\ &= \sigma\upsilon\nu(\eta\mu\sqrt{x})(\sigma\upsilon\nu\sqrt{x})(\sqrt{x})' = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu(\eta\mu\sqrt{x})\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, x > 0 \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της f στο 0.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\eta\mu(\eta\mu\sqrt{x})}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\eta\mu(\eta\mu\sqrt{x})}{\eta\mu\sqrt{x}}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu(\eta\mu\sqrt{x})}{\eta\mu\sqrt{x}} = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu v}{v} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\eta\mu(\eta\mu\sqrt{x})}{\eta\mu\sqrt{x}} \right] = +\infty$$

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο 0. Έτσι έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\eta\mu\sqrt{x})\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

ii. Για $x > 1$ είναι:

$$x - 1 > 0, \text{ οπότε } x - 1 = e^{\ln(x-1)}$$

Άρα

$$f(x) = (x-1)^{x\eta\mu x} = e^{\ln(x-1)^{x\eta\mu x}} = e^{x\eta\mu x \ln(x-1)}, \quad x > 1$$

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{x\eta\mu x \ln(x-1)} [x\eta\mu x \ln(x-1)]' =$$

$$= (x-1)^{x\eta\mu x} \left[\eta\mu x \ln(x-1) + x\sigma\upsilon\nu x \ln(x-1) + \frac{x\eta\mu x}{x-1} \right], \quad x > 1$$

iii. Είναι $f(x) = \log_{x-1}(\eta\mu x) = \frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln(x-1)}, \quad x \in (1, 2) \cup (2, \pi)$

Η f παραγωγίσιμη σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \ln(\eta\mu x)}{[\ln(x-1)]^2} =$$

$$= \frac{(x-1)\sigma\upsilon\nu x \ln(x-1) - \eta\mu x \ln(\eta\mu x)}{(x-1)\eta\mu x [\ln(x-1)]^2}, \quad x \in (1, 2) \cup (2, \pi)$$

iv. Η f είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 3^{3^x} (\ln 3) (3^x)' = 3^{3^x} (\ln 3) 3^x (\ln 3) =$$

$$= 3^{3^x + x} (\ln 3)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 6.

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

i. $h(x) = (x-1)^{\frac{2}{5}}$

ii. $h(x) = (1 - \ln x)^{\frac{5}{3}}$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = [1, +\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{2}{5}(x-1)^{-\frac{3}{5}}$, $x > 1$.

Θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της h στο 1.

Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{x-1} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(x-1)^3}}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[5]{(x-1)^3}} = +\infty$$

Άρα η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Έτσι έχουμε:

$$h'(x) = \frac{2}{5}(x-1)^{-\frac{3}{5}}, \quad x > 1$$

ii. Πρέπει $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow \ln e \geq \ln x \Leftrightarrow e \geq x$ και $x > 0$, άρα το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = (0, e]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, e)$ με

$$h'(x) = \frac{5}{3}(1 - \ln x)^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{5(1 - \ln x)^{\frac{2}{3}}}{3x}, \quad 0 < x < e.$$

Θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της h στο e .

Για $0 < x < e$ έχουμε:

$$\frac{h(x) - h(e)}{x - e} = \frac{(1 - \ln x)^{\frac{5}{3}}}{x - e} = \frac{(1 - \ln x)(1 - \ln x)^{\frac{2}{3}}}{x - e} = -\frac{\ln x - \ln e}{x - e} \sqrt[3]{(1 - \ln x)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, άρα είναι

παραγωγίσιμη και στο e με $f'(e) = \frac{1}{e}$.

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = f'(e) = \frac{1}{e}$

- $\lim_{x \rightarrow e^-} \sqrt[3]{(1 - \ln x)^2} = 0$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{h(x) - h(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \left[-\frac{\ln x - \ln e}{x - e} \cdot \sqrt[3]{(1 - \ln x)^2} \right] = -\frac{1}{e} \cdot 0 = 0.$$

Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο e με $h'(e) = 0$

Έτσι έχουμε:

$$h'(x) = -\frac{5(1 - \ln x)^{\frac{2}{3}}}{3x}, \quad 0 < x \leq e$$

Άσκηση 7.

Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τότε ισχύουν:

- i. Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή.
- ii. Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια.

Λύση

- i. Αφού η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια τότε:

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα έχουμε:

$$[f(-x)]' = f'(x) \Leftrightarrow [f'(-x)](-x)' = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f' είναι περιττή συνάρτηση.

- ii. Αφού η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή τότε:

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα έχουμε:

$$[f(-x)]' = -f'(x) \Leftrightarrow [f'(-x)](-x)' = -f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f' είναι άρτια συνάρτηση.

Άσκηση 8.

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, άρτια και $f(0) = 0$, να δείξετε ότι για την συνάρτηση $g(x) = (f \circ f)(x) + 2e^x$ ισχύει $g'(0) = 2$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g = \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x) + 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$\begin{aligned} g'(0) &= f'(f(0))f'(0) + 2e^0 = \\ &= f'(0)f'(0) + 2 = \\ &= [f'(0)]^2 + 2 \quad (1). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x) = f(x)$ (2).

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$[f(-x)]' = [f(x)]' \Leftrightarrow f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x) \quad (3), \text{ οπότε η } f' \text{ είναι περιττή στο } \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ από την (3) έχουμε:

$$f'(0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0.$$

Επομένως από την σχέση (1) έχουμε: $g'(0) = 2$

Άσκηση 9.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $g(x) = f(\eta\mu x + x^2),$

ii. $g(x) = f(f(\ln x)), \quad x > 0,$

iii. $g(x) = f^3(\sigma\upsilon\nu x),$

iv. $g(x) = \eta\mu(f(f(x)))$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g = \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f'(\eta\mu x + x^2)](\eta\mu x + x^2)' = \\ &= [f'(\eta\mu x + x^2)](\sigma\upsilon\nu x + 2x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g = (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(f(\ln x))[f(\ln x)]' = \\ &= f'(f(\ln x))[f'(\ln x)]\frac{1}{x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

iii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g = \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3f^2(\sigma\upsilon\nu x)[f(\sigma\upsilon\nu x)]' = \\ &= 3f^2(\sigma\upsilon\nu x)[f'(\sigma\upsilon\nu x)](\sigma\upsilon\nu x)' = \\ &= 3f^2(\sigma\upsilon\nu x)[f'(\sigma\upsilon\nu x)](-\eta\mu x) = \\ &= -3\eta\mu x f^2(\sigma\upsilon\nu x)[f'(\sigma\upsilon\nu x)], \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

iv. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g = \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} g'(x) &= [\sin(f(f(x)))](f(f(x)))' = \\ &= [\sin(f(f(x)))] [f'(f(x))] f'(x) = \\ &= f'(x) [f'(f(x))] \sin(f(f(x))), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άσκηση 10.

Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ \sqrt{x} \eta \mu \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + x, & x < 0 \\ x - \eta \mu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Λύση

i.

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 2x + 1, \quad x < 0.$$

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x} \eta \mu \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \eta \mu \sqrt{x} + \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \sigma \upsilon \nu \sqrt{x} = \\ &= \frac{\eta \mu \sqrt{x} + \sqrt{x} \sigma \upsilon \nu \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

- Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο 0.

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 + x}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x + 1$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x} \eta \mu \sqrt{x}}{x} = \frac{\eta \mu \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$.

Η παράγωγος της f ορίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu\sqrt{x} + \sqrt{x}\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

ii.

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)' + (x)' = 2x \eta\mu \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} + 1 = \\ &= 2x \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} + 1, \quad x < 0. \end{aligned}$$

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (x - \eta\mu x)' = 1 - \sigma\upsilon\nu x, \quad x > 0.$$

- Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο 0.

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x} + x}{x} = x \eta\mu \frac{1}{x} + 1$$

Είναι:

$$\left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x| = -x$$

άρα

$$-(-x) \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq -x \Leftrightarrow x \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq -x$$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\pm x) = 0$ θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$,

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - \eta\mu x}{x} = 1 - \frac{\eta\mu x}{x}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Η παράγωγος της f ορίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} + 1, & x < 0 \\ 1 - \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$$

Άσκηση 11.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = xe^x$.

Να δείξετε ότι: $f'(0) + f''(0) + f'''(0) = 6$

Λύση

Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x, \text{ οπότε } f'(0) = (1+0)e^0 = 1.$$

$$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x, \text{ οπότε } f''(0) = (2+0)e^0 = 2.$$

$$f'''(x) = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x, \text{ οπότε } f'''(0) = (3+0)e^0 = 3.$$

Έτσι έχουμε:

$$f'(0) + f''(0) + f'''(0) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Άσκηση 12.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x - \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ x^2 + \kappa, & x \geq 0 \end{cases}$$

όπου $\kappa, \lambda, \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda, \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = \lambda + \eta\mu x$ για κάθε $\kappa, \lambda, \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2x$ για κάθε $\kappa, \lambda, \in \mathbb{R}$.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν $\kappa, \lambda, \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Αρχικά θα εξετάσουμε αν υπάρχουν $\kappa, \lambda, \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

Η f είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= f(0) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (\lambda x - \sigma\upsilon\nu x) &= \kappa \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \kappa) &= \kappa \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -1 &= \kappa \\ \kappa &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \kappa = -1$$

Έτσι έχουμε f συνεχής στο 0 αν και μόνο αν $\kappa = -1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έτσι αν $\kappa = -1$ ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x - \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Παραγωγισιμότητα της f στο 0.

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\lambda x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} = \lambda + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\lambda + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} \right] = \lambda + 0 = \lambda$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x^2-1+1}{x} = \frac{x^2}{x} = x$$

οπότε

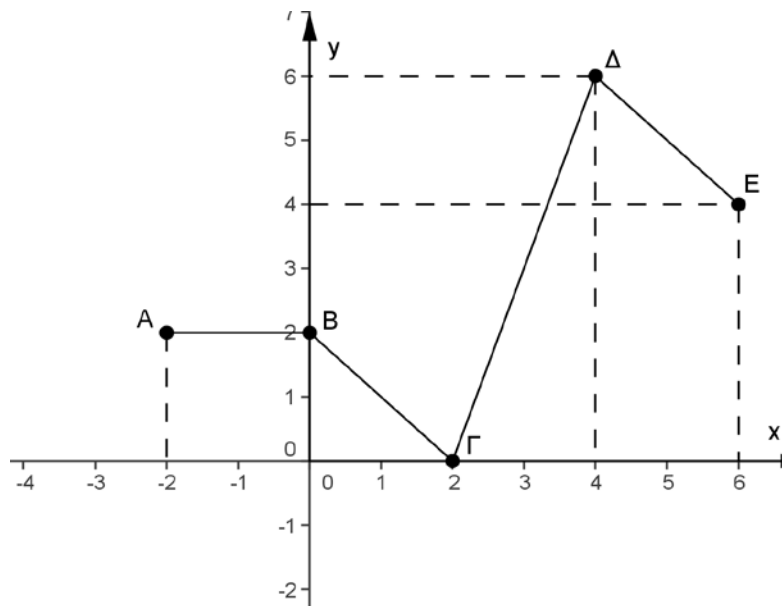
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνον αν $\lambda = 0$ και $\kappa = -1$.

Έτσι έχουμε: Αν $\lambda = 0$ και $\kappa = -1$ η f είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 13.

Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης του παρακάτω σχήματος.



Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lambda_{AB} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lambda_{B\Gamma} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Έτσι η f δεν παραγωγίζεται στο 0. Είναι φανερό ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(Το σημείο B είναι γωνιακό σημείο της C_f).

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lambda_{B\Gamma} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{6 - 0}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Έτσι η f δεν παραγωγίζεται στο 2. Είναι φανερό ότι η f είναι συνεχής στο 2.

(Το σημείο Γ είναι γωνιακό σημείο της C_f).

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lambda_{\Gamma\Delta} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lambda_{\Delta\epsilon} = \frac{6 - 4}{4 - 6} = -1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}.$$

Έτσι η f δεν παραγωγίζεται στο 4. Είναι φανερό ότι η f είναι συνεχής στο 4. (Το σημείο Δ είναι γωνιακό σημείο της C_f).

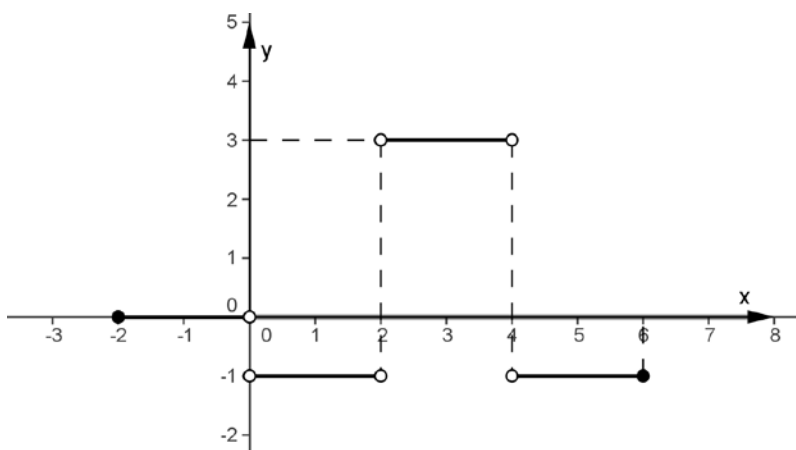
Η f παραγωγίζεται στο $[-2, 0)$ με $f'(x) = \lambda_{AB} = 0$ για κάθε $-2 \leq x < 0$.

Η f παραγωγίζεται στο $(0, 2)$ με $f'(x) = \lambda_{B\Gamma} = -1$ για κάθε $0 < x < 2$.

Η f παραγωγίζεται στο $(2, 4)$ με $f'(x) = \lambda_{\Gamma\Delta} = 3$ για κάθε $2 < x < 4$.

Η f παραγωγίζεται στο $(4, 6]$ με $f'(x) = \lambda_{\Delta\epsilon} = -1$ για κάθε $4 < x \leq 6$.

Η γραφική παράσταση της f' δίνεται από το παρακάτω σχήμα.



ΣΧΟΛΙΟ:

1. Έστω σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f , ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

i. Η f να είναι συνεχής στο x_0 .

ii. Τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Να είναι πραγματικοί αριθμοί η άπειρα.

iii.
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Το σημείο Μ θα λέγεται γωνιακό σημείο της C_f . Είναι φανερό ότι η f δεν παραγωγίζεται στο x_0 .

2. Έστω τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να είναι τμήμα της C_f . Αν υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$, τότε η f παραγωγίζεται σε κάθε $x_1 < x < x_2$ με $f'(x) = \lambda_{AB}$. (λ_{AB} είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB).

Άσκηση 14.

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\eta \mu x} - 1}{x}$

Λύση

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) \stackrel{x = \frac{1}{u}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + 1} - \frac{1}{u} \right) =$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1 - u + u^2} - 1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = f'(0) = -\frac{1}{2}$$

Θέτω $f(u) = \sqrt{u^2 - u + 1}$, $u \in \mathbb{R}$. Η f παραγωγίσιμη με $f'(u) = \frac{2u - 1}{2\sqrt{u^2 - u + 1}}$, $u \in \mathbb{R}$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\eta \mu x} - 1}{x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$

(*) Θέτω $f(x) = e^{\eta \mu x}$, $x \in \mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{\eta \mu x} \sigma \upsilon \nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Ημερομηνία τροποποίησης: 30/8/2011