

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

[Κεφ. 2.2: Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις - Παράγωγος Συνάρτηση - Κεφ. 2.3: Κανόνες Παραγωγίσης του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^7 + 5x^5 - 3x^4 - \frac{x^3}{3} + x + 2011$.

β) $g(\theta) = \eta\mu\theta - e^\theta + 2\sqrt{\theta} - \frac{\varepsilon\phi\theta}{8}$ με $D_g = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) $h(x) = -3\ln x + \ln 3 + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x - \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^7 + 5x^5 - 3x^4 - \frac{x^3}{3} + x + 2011 \right)' = \\ &= (x^7)' + (5x^5)' - (3x^4)' - \left(\frac{x^3}{3} \right)' + (x)' + (2011)' = 7x^6 + 25x^4 - 12x^3 - x^2 + 1. \end{aligned}$$

β) Για κάθε $x \in D_g$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \left(\eta\mu\theta - e^\theta + 2\sqrt{\theta} - \frac{\varepsilon\phi\theta}{8} \right)' = (\eta\mu\theta)' - (e^\theta)' + (2\sqrt{\theta})' - \left(\frac{\varepsilon\phi\theta}{8} \right)' = \\ &= \sigma\upsilon\nu\theta - e^\theta + \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{8\sigma\upsilon\nu^2\theta}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

γ) $D_h = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[-3\ln x + \ln 3 + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x - \left(\frac{3}{2}\right)^x \right]' = -(3\ln x)' + (\ln 3)' + (\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x)' - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]' = \\ &= -\frac{3}{x} + 0 - \sqrt{2}\eta\mu x - \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{x} - \sqrt{2}\eta\mu x - (\ln 3 - \ln 2)\left(\frac{3}{2}\right)^x. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f της μορφής

$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x)$, όπου $f_1, f_2, \dots, f_k$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο D_f , εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσης αθροίσματος, γινομένου σταθερού αριθμού επί συνάρτησης και με την βοήθεια των παραγώγων βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε την f' .

Παράδειγμα 2.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 e^x$.

β) $g(x) = x \ln x \sin x$.

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (x + 2).$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης h της μορφής $h(x) = f(x)g(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο D_h , εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσης γινομένου

$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ και με την βοήθεια των παραγώγων βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε την h' .

β) $D_g = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \ln x \sin x)' = (x)' \ln x \sin x + x (\ln x)' \sin x + x \ln x (\sin x)' = \\ &= \ln x \sin x + x \frac{1}{x} \sin x + x \ln x (-\eta \mu x) = \ln x \sin x + \sin x - x \ln x \eta \mu x. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης t της μορφής $t(x) = f(x)g(x)h(x)$, όπου f, g, h παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο D_t , εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσης γινομένου τριών συναρτήσεων $(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$ και με την βοήθεια των παραγώγων βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε την t' .

Παράδειγμα 3.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = -\frac{5}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$\beta) g(x) = \frac{\ln x}{\sigma\phi x}.$$

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{5}{x^2 - 2x + 1} \right)' = -5 \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right)' = -5 \frac{(1)'(x^2 - 2x + 1) - 1(x^2 - 2x + 1)'}{(x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= -5 \frac{-(2x - 2)}{[(x - 1)^2]^2} = 10 \frac{x - 1}{(x - 1)^4} = \frac{10}{(x - 1)^3}. \end{aligned}$$

$$\beta) D_g = A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ και } x \neq \kappa \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\ln x}{\sigma\phi x} \right)' = \frac{(\ln x)' \sigma\phi x - \ln x (\sigma\phi x)'}{(\sigma\phi x)^2} = \frac{\frac{\sigma\phi x}{x} + \frac{\ln x}{\eta\mu^2 x}}{\sigma\phi^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\phi x + x \ln x}{x \eta\mu^2 x \cdot \sigma\phi^2 x} = \\ &= \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + x \ln x}{x \eta\mu^2 x \cdot \sigma\phi^2 x} = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + x \ln x}{x \sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in A. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης h της μορφής $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου f, g

παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο D_h , εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσης ηλίκου

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ και με την βοήθεια των παραγώγων βασικών συναρτήσεων}$$

βρίσκουμε την h' .

Παράδειγμα 4.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i. $f(x) = x^5$, $x_0 = 1$.

ii. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

iii. $f(x) = \eta\mu x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

iv. $f(x) = \ln x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

v. $f(x) = e^x$, $x_0 = \frac{\ln 9}{2}$.

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 5x^4$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 1$, με $f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$.

ii. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = [0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 4$, με $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

iii. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{3}$, με $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

iv. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{2}$, με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

ν. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = \frac{\ln 9}{2}$, με

$$f'\left(\frac{\ln 9}{2}\right) = e^{\frac{\ln 9}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln 9} = e^{\ln 3} = 3$$

Μεθοδολογία

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη και $x_0 \in D_f$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, θα ορίζεται ο παράγωγος αριθμός της f για κάθε $x_0 \in D_f$, δηλαδή ο αριθμός $f'(x_0)$. Ο υπολογισμός του αριθμού $f'(x_0)$ με τον ορισμό της παραγωγισιμότητας συνάρτησης σε σημείο, πολλές φορές είναι αρκετά δύσκολος, γι' αυτό υπολογίζουμε την παράγωγο $f'(x)$ με τη βοήθεια των κανόνων παραγωγίσιμης και των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων και θέτουμε στο τύπο του $f'(x)$ όπου x το x_0 .

Παράδειγμα 5.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2x^3 + \ln|x|$

ii. $f(x) = \ln x \cdot \eta\mu x$

iii. $f(x) = \frac{x^4 - x}{e^x}$

iv. $f(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{2 + \eta\mu x}$

v. $f(x) = x \cdot \sigma\varphi x$

vi. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R}^*$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Έτσι έχουμε:

$$f'(x) = (2x^3)' + (\ln|x|)' = 2(3x^2) + \frac{1}{x} = 6x^2 + \frac{1}{x} = \frac{6x^3 + 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έτσι έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x)' \eta\mu x + \ln x (\eta\mu x)' = \frac{1}{x} \eta\mu x + \ln x \sigma\upsilon\nu x, \quad x > 0.$$

iii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x^4 - x)' e^x - (x^4 - x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{(4x^3 - 1)e^x - (x^4 - x)e^x}{e^{2x}} = \\
 &= \frac{e^x(4x^3 - 1 - x^4 + x)}{e^{2x}} = \frac{e^x(-x^4 + 4x^3 + x - 1)}{e^{2x}} = \\
 &= \frac{-x^4 + 4x^3 + x - 1}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\varepsilon\phi x)'(2 + \eta\mu x) - \varepsilon\phi x(2 + \eta\mu x)'}{(2 + \eta\mu x)^2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}(2 + \eta\mu x) - \varepsilon\phi x \sigma\upsilon\nu x}{(2 + \eta\mu x)^2} = \\
 &= \frac{2 + \eta\mu x - \varepsilon\phi x \sigma\upsilon\nu^3 x}{(2 + \eta\mu x)^2 \sigma\upsilon\nu^2 x} = \\
 &= \frac{2 + \eta\mu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x}{(2 + \eta\mu x)^2 \sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in D_f = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}.
 \end{aligned}$$

v. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x)' \sigma\phi x + x(\sigma\phi x)' = \sigma\phi x - x \frac{1}{\eta\mu^2 x} \\
 &= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} - \frac{x}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - x}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in D_f = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}.
 \end{aligned}$$

vi. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = (0, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σαν γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Έτσι έχουμε:

$$f'(x) = (e^x)' \sin x \ln x + e^x (\sin x)' \ln x + e^x \sin x (\ln x)' =$$

$$= e^x \sin x \ln x + e^x (-\eta \mu x) \ln x + e^x (\sin x) \frac{1}{x} =$$

$$= e^x \left(\sin x \ln x - \eta \mu x \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right), \quad x > 0.$$

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη τότε ενεργούμε ως εξής:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της h .
2. Αν $h = f + g$ ή $h = f \cdot g$ ή $h = \frac{f}{g}$ ή $h = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και f, g παραγωγίσιμες τότε η h είναι παραγωγίσιμη.
3. Ο τύπος της παραγώγου της h θα είναι αντίστοιχα:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x), \quad x \in D_h$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad x \in D_h$$

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad x \in D_h$$

$$h'(x) = \lambda f'(x), \quad x \in D_h$$

Παράδειγμα 6.

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων.

i. $f(x) = x^3 \sqrt{x}$

ii. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$

iii. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

Λύση

i. 1^{ος} Τρόπος:

Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [0, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \sqrt{x} + x^3 (\sqrt{x})' = 3x^2 \sqrt{x} + x^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= 3x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2 \sqrt{x}}{2} = \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x}, \quad x > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 \sqrt{x}}{x} = x^2 \sqrt{x}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \sqrt{x}) = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$. (2)

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη και από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(x) = \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

2ος Τρόπος:

$$H \ f(x) = \begin{cases} x^{\frac{7}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$An \ x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2} x^2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x}.$$

An $x = 0$ όπως παραπάνω με τον ορισμό

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [0, +\infty)$.

H f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{(x)'(\sqrt{x}+1) - x(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\sqrt{x}+1 - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$
$$\frac{2x+2\sqrt{x}-x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{x+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)^2}, \quad x > 0 \quad (1)$$

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x}+1}}{x} = \frac{x}{x(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ (2)

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη. Με βάση τις σχέσεις (1) και (2) η παράγωγος της f ορίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)^2}, \quad x \geq 0$$

iii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = [0, +\infty)$.

H f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (x^2)' + (\sqrt{x})' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0 \quad (1)$$

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x} = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Έτσι η παράγωγος της f ορίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Μεθοδολογία

Έστω μια συνάρτηση h έτσι ώστε:

$$h = f + g \quad \text{ή} \quad h = f \cdot g \quad \text{ή} \quad h = \frac{f}{g}$$

Αν D_h είναι το πεδίο ορισμού της h και A_1 είναι το σύνολο των σημείων του D_h στα οποία οι f, g είναι παραγωγίσιμες, τότε η h θα είναι παραγωγίσιμη στο A_1 .

Αν A_2 είναι το σύνολο των σημείων του D_h ώστε μια τουλάχιστον από τις f, g να μην είναι παραγωγίσιμη, τότε δεν μπορούμε εκ των προτέρων να γνωρίζουμε αν η h είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά τα σημεία.

Για να εξετάσουμε αν η h είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά τα σημεία, εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης σε σημείο.

Παράδειγμα 7.

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \sin x + 1, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Λύση

i.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ σαν πολυωνυμική συνάρτηση, με $f'(x) = 3x^2 - 1$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3$.
- Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - x}{x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x} = x^2 - 1$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - 3x}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3 \right) = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Έτσι η παραγωγός της f ορίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3, & x > 0 \end{cases}$$

ii.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = -\eta\mu x$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ σαν πολυωνυμική συνάρτηση, με $f'(x) = 2x$.
- Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sigma\upsilon\nu x + 1 - 2}{x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + 2 - 2}{x} = \frac{x^2}{x} = x$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$.

Έτσι η παράγωγος της f ορίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f της οποίας ο τύπος δίνεται με κλάδους, κάνουμε τα εξής:

1. Αξιοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης και τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε την παράγωγο της f σε κάθε κλάδο χωριστά, με εξαίρεση τα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού και τα σημεία x_0 αλλαγής του τύπου της f , στα οποία η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης f εξετάζεται με τον ορισμό.
2. Ειδικά για το σημείο x_0 αλλαγής του τύπου της συνάρτησης f εξετάζουμε καταρχάς αν f είναι συνεχής στο x_0 .

i. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

ii. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε:

Για $x > x_0$ υπολογίζουμε το λόγο μεταβολής $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και στη συνέχεια

εξετάζουμε αν το δεξιό πλευρικό όριο του λόγου μεταβολής, δηλαδή το

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

- Αν το όριο αυτό δεν υπάρχει ή είναι $\pm\infty$, τότε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Αν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε συνεχίζουμε ως εξής:

Για $x < x_0$ υπολογίζουμε το λόγο μεταβολής $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και στη συνέχεια

εξετάζουμε αν το αριστερό πλευρικό όριο του λόγου μεταβολής, δηλαδή το

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Σε περίπτωση που και το δεύτερο όριο είναι πραγματικός αριθμός, τότε εξετάζουμε αν τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα ή άνισα.

Παράδειγμα 8.

Έστω οι συναρτήσεις f και g με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$$

- i. Να εξετάσετε αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \geq 0$.
- ii. Να εξετάσετε αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση

- i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 3x^2$ για κάθε $x > 0$.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3}{x} = x^2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$.

Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = 3x^2$ για κάθε $x \geq 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 3x^2$ για κάθε $x > 0$.

Εξετάζουμε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x^3+3-3}{x} = \frac{x^3}{x} = x^2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{3-x^2-3}{x} = \frac{-x^2}{x} = -x$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

Άρα η g παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0) = 0$.

Έτσι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) = 3x^2$ για κάθε $x \geq 0$.

Επομένως ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

ii. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = x^3 \neq x^3 + 3 = g(x)$.

Άρα $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Σχόλιο: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , ώστε

$$f'(x) = g'(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

δεν έπεται ότι

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Παράδειγμα 9.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i. $h(x) = \sigma\upsilon\nu(1 - \ln x)$

ii. $h(x) = e^{x^2 - x}$

iii. $h(x) = \eta\mu^2(x^2 - 1)$

iv. $h(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu(e^x - x))$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = (0, +\infty)$.

Θέτουμε,

$$g(x) = 1 - \ln x, \quad x > 0$$

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $h = f \circ g$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -\frac{1}{x}$, $x > 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι θα είναι και η h παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με,

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = [f'(1 - \ln x)]\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\eta\mu(1 - \ln x)}{x}, \quad x > 0$$

ii. Το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = \mathbb{R}$.

Θέτουμε,

$$g(x) = x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $h = f \circ g$.

Η g είναι παραγωγίσιμη σαν πολυωνυμική συνάρτηση με

$$g'(x) = 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Έτσι θα είναι η h παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με,

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = [f'(x^2 - x)](2x - 1) = e^{x^2 - x} (2x - 1)$$

iii. Το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = \mathbb{R}$.

Θέτουμε,

$$g(x) = \eta\mu(x^2 - 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $h = f \circ g$

Θέτουμε,

$$\kappa(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $g = \lambda \circ \kappa$

Η κ είναι παραγωγίσιμη με

$$\kappa'(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η λ είναι παραγωγίσιμη με

$$\lambda'(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \lambda'(\kappa(x))\kappa'(x) = [\lambda'(x^2 - 1)]2x = [\sigma\upsilon\nu(x^2 - 1)]2x = 2x\sigma\upsilon\nu(x^2 - 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Επίσης έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x))g'(x) = f'(\eta\mu(x^2 - 1)) \left[2x\sigma\upsilon\nu(x^2 - 1) \right] \\ &= \left[2\eta\mu(x^2 - 1) \right] \left[2x\sigma\upsilon\nu(x^2 - 1) \right] = \\ &= 4x\eta\mu(x^2 - 1)\sigma\upsilon\nu(x^2 - 1) = \\ &= 2x\eta\mu \left[2(x^2 - 1) \right], \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

iv. Το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = \mathbb{R}$.

Θέτουμε,

$$f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sigma\upsilon\nu(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $h = f \circ g$.

Θέτουμε,

$$\kappa(x) = e^x - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $g = \lambda \circ \kappa$

Η κ είναι παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με,

$$\kappa'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η λ είναι παραγωγίσιμη με

$$\lambda'(x) = -\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \lambda'(\kappa(x))\kappa'(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\lambda'(e^x - x) \right] (e^x - 1) = \left[-\eta\mu(e^x - x) \right] (e^x - 1) = -(e^x - 1)\eta\mu(e^x - x) = \\
&= (1 - e^x)\eta\mu(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned}
h'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
&= \left[f'(\sigma\upsilon\nu(e^x - x)) \right] (1 - e^x)\eta\mu(e^x - x) = \\
&= \left[\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu(e^x - x)) \right] (1 - e^x)\eta\mu(e^x - x) = \\
&= (1 - e^x)\eta\mu(e^x - x)\sigma\upsilon\nu[\sigma\upsilon\nu(e^x - x)], \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Έστω οι συναρτήσεις h, f, g ώστε

$$h = f \circ g$$

Αν f, g είναι παραγωγίσιμες τότε η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με,

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \text{για κάθε } x \in D_h$$

Παράδειγμα 10.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i. $h(x) = \eta\mu(\ln x)$

ii. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

iii. $h(x) = 2^{e^{x^2}}$

iv. $h(x) = \sigma\upsilon\nu^3(2x+1)$

Λύση

i. Η h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D_h = (0, +\infty)$$

Η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για την εύρεση του τύπου της παραγώγου της h θα εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας.

Έστω $y = h(x)$, $u = \ln x$ τότε $y = \eta\mu u$

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Είναι:

$$\frac{dy}{dx} = h'(x), \quad \frac{dy}{du} = \sigma\upsilon\nu u = \sigma\upsilon\nu(\ln x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

Επομένως έχουμε:

$$h'(x) = [\sigma\upsilon\nu(\ln x)] \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu(\ln x), \quad x > 0$$

ii. Η h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D_h = \mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έστω $y = h(x)$, $u = x^2 + 1$ τότε $y = \ln u$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Είναι:

$$\frac{dy}{dx} = h'(x), \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Επομένως έχουμε:

$$h'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

iii. Η h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_h = \mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έστω

$$y = h(x), \quad u = x^2 \quad \text{τότε} \quad y = 2^{e^u}$$

Έστω $w = e^u$ τότε $y = 2^w$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ \frac{dy}{du} &= \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

$$\text{Είναι } \frac{dy}{dx} = h'(x), \quad \frac{dy}{dw} = 2^w \ln 2 = 2^{e^u} \ln 2 = 2^{e^{x^2}} \ln 2, \quad \frac{dw}{du} = e^u = e^{x^2}, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Επομένως έχουμε:

$$h'(x) = \left(2^{e^{x^2}} \ln 2 \right) e^{x^2} 2x = x 2^{e^{x^2} + 1} e^{x^2} \ln 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

iv. Η h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D_h = \mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έστω $y = h(x)$, $u = 2x + 1$ τότε $y = \sin^3 u$

Έστω $w = \sin u$ τότε $y = w^3$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Είναι

$$\frac{dy}{dx} = h'(x), \quad \frac{dy}{dw} = 3w^2 = 3\sin^2 u = 3\sin^2(2x+1), \quad \frac{dw}{du} = -\eta\mu u = -\eta\mu(2x+1), \quad \frac{du}{dx} = 2.$$

Επομένως έχουμε:

$$h'(x) = 3\sin^2(2x+1)[- \eta\mu(2x+1)]2 = -6\eta\mu(2x+1)\sin^2(2x+1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Μεθοδολογία

Είναι γνωστό ότι: αν g παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$ τότε η συνάρτηση $h = fog$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta \quad (1).$$

Αν θέσουμε $y = h(x)$ και $u = g(x)$ τότε έχουμε:

$$y = h(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = f(u)$$

Είναι: $\frac{dy}{dx} = h'(x)$, $\frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$. Έτσι αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (1) θα έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ο τύπος αυτός λέγεται κανόνας της αλυσίδας και με βάση το τύπο αυτό βρίσκουμε την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης.

Παράδειγμα 11.

Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων

$$\text{i.} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x > 1 \\ -x^4 + x^3, & x \leq 1 \end{cases}.$$

$$\text{ii.} \quad f(x) = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}.$$

Λύση

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ σαν πολυωνυμική με $f'(x) = -4x^3 + 3x^2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ σαν πολυωνυμική με $f'(x) = 2x - 3$.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = -1$$

Για $x < 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-x^4 + x^3}{x - 1} = \frac{-x^3(x - 1)}{x - 1} = -x^3$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^3) = -1$$

άρα η f παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = -1$.

Έτσι η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 1 \\ -4x^3 + 3x^2, & x < 1 \end{cases}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ σαν πολυωνυμική με $f''(x) = -12x^2 + 6x$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ σαν πολυωνυμική με $f''(x) = 2$.

Εξετάζουμε αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \frac{2x - 3 + 1}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$$

Για $x < 1$ έχουμε:

$$\frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \frac{-4x^3 + 3x^2 + 1}{x - 1} = \frac{-4x^3 + 4x^2 - x^2 + 1}{x - 1} =$$

$$= \frac{-4x^2(x - 1) - (x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{-4x^2(x - 1) - (x + 1)(x - 1)}{x - 1} =$$

$$= \frac{(x - 1)(-4x^2 - x - 1)}{x - 1} = -4x^2 - x - 1$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-4x^2 - x - 1) = -6$$

Άρα η f δεν είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο 1.

Επομένως η δεύτερη παράγωγος της f έχει τύπο:

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 1 \\ -12x^2 + 6x, & x < 1 \end{cases}$$

- ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 3x^2$.
 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 4x^3$.
 Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^4}{x} = x^3$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3}{x} = x^2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .
 Επομένως η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \geq 0 \\ 3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική, με $f''(x) = 6x$.
 Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική, με $f''(x) = 12x^2$.
 Εξετάζουμε αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{4x^3}{x} = 4x^2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 = 0$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{3x^2}{x} = 3x$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x = 0$$

Άρα η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο 0 με $f''(0) = 0$.

Επομένως η δεύτερη παράγωγος της f είναι:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x \geq 0 \\ 6x, & x < 0 \end{cases}$$

Μεθοδολογία

Για να ορίσουμε τις συναρτήσεις $f'', \dots, f^{(v)}$ κ.ο.κ, προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού τους, ως εξής:

$$D_{f^{(v)}} = \{x \in D_{f^{(v-1)}} \mid \eta \ f^{(v-1)} \text{ να παραγωγίζεται στο } x\} \text{ με } v \in \mathbb{N} \text{ και } v \geq 2.$$

Ο τύπος της $f^{(v)}$ προσδιορίζεται από την σχέση $f^{(v)}(x) = \left(f^{(v-1)}(x)\right)'$ με $v \in \mathbb{N}$ και $v \geq 2$.

Παράδειγμα 12.

Να αποδείξετε ότι η ν-οστή παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \eta\mu 2x$ είναι:

$$f^{(v)}(x) = 2^v \eta\mu\left(v \frac{\pi}{2} + 2x\right), \quad v \in \mathbb{N} \text{ με } v \geq 1$$

Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$f^{(v)}(x) = 2^v \eta\mu\left(v \frac{\pi}{2} + 2x\right), \quad v \in \mathbb{N} \text{ με } v \geq 1 \quad (1)$$

Για να το δείξουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε την αποδεικτική διαδικασία της Μαθηματικής επαγωγής.

1. Θα δείξουμε ότι η σχέση (1) ισχύει για $v = 1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι:

$$f'(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

Έχουμε:

$$f'(x) = (\eta\mu 2x)' = \sigma\upsilon\nu 2x \cdot (2x)' = 2\sigma\upsilon\nu 2x = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

2. Υποθέτουμε ότι η σχέση (1) ισχύει για ένα τυχαίο v , δηλαδή υποθέτουμε ότι:

$$f^{(v)}(x) = 2^v \eta\mu\left(v \frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

3. Θα δείξουμε ότι η σχέση (1) ισχύει για $v+1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι:

$$f^{(v+1)}(x) = 2^{v+1} \eta\mu\left[\left(v+1\right) \frac{\pi}{2} + 2x\right]$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{(v+1)}(x) &= (f^{(v)}(x))' = \left[2^v \eta\mu\left(v \frac{\pi}{2} + 2x\right) \right]' = \\ &= 2^v \left[\sigma\upsilon\nu\left(v \frac{\pi}{2} + 2x\right) \right] \left(v \frac{\pi}{2} + 2x \right)' = 2^v \cdot 2\sigma\upsilon\nu\left(v \frac{\pi}{2} + 2x\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{v+1} \sigma \nu \left(v \frac{\pi}{2} + 2x \right) = 2^{v+1} \cdot \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} + v \frac{\pi}{2} + 2x \right) = \\
&= 2^{v+1} \eta \mu \left[(v+1) \frac{\pi}{2} + 2x \right]
\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

- i. Αν είναι γνωστός ο τύπος της ν-οστής παραγώγου μιας συνάρτησης f και ζητείται να δείξουμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει για την παράγωγο της f οποιασδήποτε τάξης, εφαρμόζουμε την αποδεικτική διαδικασία της Μαθηματικής επαγωγής.
- ii. Αν δεν είναι γνωστός ο τύπος της ν-οστής παραγώγου μιας συνάρτησης f , θα πρέπει αρχικά να προσδιορίσουμε μια πιθανή σχέση, η οποία θα μας δίνει αυτόν τον τύπο. Βρίσκοντας τις $f', f'', f''', \dots$, μαντεύουμε την πιθανή σχέση που θα μας δώσει τον τύπο της ν-οστής παραγώγου της f . Για να δείξουμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει για την παράγωγο οποιασδήποτε τάξης της f , εφαρμόζουμε την αποδεικτική διαδικασία της Μαθηματικής επαγωγής.

Παράδειγμα 13.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \lambda, & x \geq 0 \\ \kappa x^3 + x, & x < 0 \end{cases}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ ώστε $f'(0) = 1$ και $f'(-1) = 2$.

Λύση

- Αφού f παραγωγίσιμη στο 0 τότε η f συνεχής στο 0. Έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + \lambda) = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (\kappa x^3 + x) = \lambda \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lambda = \lambda \\ \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Έτσι ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ \kappa x^3 + x, & x < 0 \end{cases}$$

Αφού η f παραγωγίζεται στο 0 με $f'(0) = 1$ τότε έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\kappa x^3 + x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(\kappa x^2 + 1)}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$
$$\left. \begin{aligned} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (\kappa x^2 + 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 1 = 1 \\ 0\kappa + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 1 = 1 \\ 0\kappa = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \kappa \in \mathbb{R}.$$

Άρα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\lambda = 0$ η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$.

- Για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = 3\kappa x^2 + 1, x < 0$.

Άρα $f'(-1) = 3\kappa(-1)^2 + 1 = 3\kappa + 1$.

Όμως $f'(-1) = 2 \Leftrightarrow 3\kappa + 1 = 2 \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{3}$.

Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\kappa = \frac{1}{3}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο -1 με $f'(-1) = 2$.

Έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{matrix} f'(0)=1 \\ f'(-1)=2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa = \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ και } \kappa = \frac{1}{3}$$

Επομένως ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + x, & x < 0 \end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και στο -1, με $f'(0)=1$ και $f'(-1)=2$.

Μεθοδολογία

Αν μας δίνεται μια συνάρτηση f , όπου ο τύπος της περιέχει μια παράμετρο (ή περισσότερες παραμέτρους), πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν πρόκειται για μια συνάρτηση, αλλά για μια οικογένεια συναρτήσεων, τόσων συναρτήσεων όσες είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος (αντίστοιχα οι παράμετροι).

Έτσι όταν ζητούνται οι τιμές της παραμέτρου (αντίστοιχα των παραμέτρων) ώστε η συνάρτηση f να έχει κάποια ιδιότητα, αναζητούμε την συνάρτηση ή τις συναρτήσεις από την οικογένεια των συναρτήσεων που έχει την ιδιότητα αυτή.

Με την υπόθεση ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί την ιδιότητα, βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου ή των παραμέτρων. Αντικαθιστούμε τις τιμές της παραμέτρου ή των παραμέτρων στον τύπο της συνάρτησης f και επαληθεύουμε αν η προκύπτουσα συνάρτηση είναι η ζητούμενη.

Έτσι αν μας δίνεται μια συνάρτηση f , όπου ο τύπος της περιέχει μια παράμετρο ή περισσότερες παραμέτρους και ζητείται να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου ή των παραμέτρων ώστε η f να παραγωγίζεται σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της ή να είναι παραγωγίσιμη, βρίσκουμε τις συναρτήσεις της οικογένειας των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο συγκεκριμένο σημείο ή είναι συνεχείς. Από αυτές τις συναρτήσεις βρίσκουμε ποιες είναι παραγωγίσιμες στο συγκεκριμένο σημείο ή παραγωγίσιμες.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \left(\frac{x^4}{2} + 2x^3 - x - \sqrt{\alpha} \right)^3, \alpha \geq 0.$

β) $\varphi(x) = (x^4 + x^2 + 1)^{\sqrt{5}}.$

γ) $g(x) = e^{3x^2-1} + \sin(\eta\mu x).$

δ) $h(x) = \ln \sqrt{e^x + 1}.$

ε) $K(x) = (x^2 + x + 1)^{x^3-4}.$

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R}.$ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(\frac{x^4}{2} + 2x^3 - x - \sqrt{\alpha} \right)^3 \right]' = 3 \left(\frac{x^4}{2} + 2x^3 - x - \sqrt{\alpha} \right)^2 \left(\frac{x^4}{2} + 2x^3 - x - \sqrt{\alpha} \right)' = \\ &= 3 \left(\frac{x^4}{2} + 2x^3 - x - \sqrt{\alpha} \right)^2 (2x^3 + 6x^2 - 1). \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f της μορφής

$f(x) = [g(x)]^v, v \in \mathbb{N} - \{0,1\},$ όπου g πολυωνυμική συνάρτηση, εφαρμόζουμε τον κανόνα

παραγωγίσης σύνθετης συνάρτησης, οπότε $f'(x) = v[g(x)]^{v-1} g'(x)$ και με την βοήθεια του κανόνα παραγωγίσης αθροίσματος και των παραγώγων βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε την $f'.$

β) $D_\varphi = \mathbb{R}.$

$x^4 + x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R},$ οπότε έχουμε:

$$f'(x) = \left[(x^4 + x^2 + 1)^{\sqrt{5}} \right]' = \sqrt{5}(x^4 + x^2 + 1)^{\sqrt{5}-1} (x^4 + x^2 + 1)' =$$

$$= 2\sqrt{5}x(x^4 + x^2 + 1)^{\sqrt{5}-1} (2x^2 + 1).$$

Μεθοδολογία

Η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(x) = [f(x)]^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, όπου $f(x) > 0$, έχει παράγωγο $\varphi'(x) = \lambda f^{\lambda-1}(x) \cdot f'(x)$. Όπου η $f'(x)$ υπάρχει.

γ) $D_g = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x) = \left[e^{3x^2-1} + \sin(\eta\mu x) \right]' = \left(e^{3x^2-1} \right)' + \left[\sin(\eta\mu x) \right]' =$$

$$= e^{3x^2-1} (3x^2 - 1)' - \eta\mu(\eta\mu x)(\eta\mu x)' = 6xe^{3x^2-1} - \eta\mu(\eta\mu x) \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης g , με πεδίο ορισμού το Δ , της μορφής $g(x) = h(f(x)) + w(v(x))$ όπου f, v παραγωγίσιμες στο Δ και h, w παραγωγίσιμες στα $f(\Delta)$ και $v(\Delta)$ αντίστοιχα, εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγώγισης, αθροίσματος και σύνθετης συνάρτησης.

δ) Επειδή $e^x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$D_h = \mathbb{R}.$$

$$h'(x) = \left(\ln \sqrt{e^x + 1} \right)' = \left[\ln(e^x + 1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \left[\frac{1}{2} \ln(e^x + 1) \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{e^x + 1} (e^x + 1)' =$$

$$= \frac{e^x}{2(e^x + 1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης h της μορφής $h(x) = \ln \sqrt{f(x)}$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μετασχηματίζουμε την

συνάρτηση h με την χρήση των ιδιοτήτων του λογαρίθμου και μετά εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσιμης σύνθετης συνάρτησης $([\ln f(x)]') = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

ε) Επειδή $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$D_K = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} K'(x) &= \left[(x^2 + x + 1)^{x^3 - 4} \right]' = \left[e^{(x^3 - 4) \ln(x^2 + x + 1)} \right]' = e^{(x^3 - 4) \ln(x^2 + x + 1)} \left[(x^3 - 4) \ln(x^2 + x + 1) \right]' = \\ &= e^{(x^3 - 4) \ln(x^2 + x + 1)} \left[3x^2 \ln(x^2 + x + 1) + (x^3 - 4) \frac{1}{x^2 + x + 1} (x^2 + x + 1)' \right] = \\ &= (x^2 + x + 1)^{x^3 - 4} \left[3x^2 \ln(x^2 + x + 1) + \frac{(x^3 - 4)(2x + 1)}{x^2 + x + 1} \right], \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης K της μορφής $K(x) = [f(x)]^{g(x)}$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μετασχηματίζουμε την συνάρτηση με την βοήθεια του ορισμού του λογαρίθμου και μετά εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσιμης σύνθετης συνάρτησης (

$$K'(x) = \left([f(x)]^{g(x)} \right)' = \left(e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \right)' = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot [g(x) \cdot \ln f(x)]' = K(x) \cdot \left(\ln[f(x)]^{g'(x)} + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

Δεύτερος Τρόπος:

$$\begin{aligned} \ln K(x) &= \ln [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow (\ln K(x))' = (g(x) \ln[f(x)])' \Rightarrow \\ \frac{K'(x)}{K(x)} &= g'(x) \ln[f(x)] + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \\ K'(x) &= K(x) \left[\ln[f(x)]^{g'(x)} + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{2x - \pi} \cdot \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Πρέπει $2x - \pi \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\pi}{2}$.

Οπότε : $D_f = \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

Για κάθε $x > \frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{2x - \pi} \cdot \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right]' = (\sqrt{2x - \pi})' \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2x - \pi} \left[\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right]' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2x - \pi}} (2x - \pi)' \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2x - \pi} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x - \pi}} \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2x - \pi} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2x - \pi} \cdot \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{2x - \pi} \frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}, \text{ και επειδή:}$$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{2x - \pi} = 0,$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}, \text{ θέτουμε } u = x - \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} u = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\text{οπότε, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1, \text{ παίρνουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{2x - \pi} \frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

$$\text{Άρα } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Συνεπώς η παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x - \pi}} \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2x - \pi} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{αν } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\sqrt{2x - \pi}$, η οποία ορίζεται για κάθε

$x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, παρότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = \frac{\pi}{2}$, το γινόμενο της με την

$\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (δηλαδή η $f(x)$) είναι παραγωγίσιμη στο $x = \frac{\pi}{2}$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης h με τύπο $h(x) = f(x)g(x)$, η οποία είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $[x_0, \beta)$ (ή $(\alpha, x_0]$), εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσιμης γινομένου για το διάστημα (x_0, β) (ή (α, x_0) αντίστοιχα) και η εξέταση της παραγωγισιμότητας στο x_0 γίνεται με την βοήθεια του ορισμού.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^4 - 3x^3 + x^2, & x \leq 0 \\ \sin x - 1, & x > 0 \end{cases}$, να βρείτε :

α) την f'

β) την f''

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R}$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (x^4 - 3x^3 + x^2)' = 4x^3 - 9x^2 + 2x$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (\sin x - 1)' = -\eta\mu x$$

Στην συνέχεια εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f με πλευρικά όρια στη θέση $x = 0$, δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 - 3x^3 + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(x^2 - 3x + 1)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0.$$

Άρα $f'(0) = 0$.

$$\text{Επομένως : } f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 9x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ -\eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$$

β) Για $x < 0$ έχουμε: $f''(x) = (4x^3 - 9x^2 + 2x)' = 12x^2 - 18x + 2$

Για $x > 0$ έχουμε: $f''(x) = (-\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$

Στη θέση $x = 0$ θα εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f' με πλευρικά όρια, δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^3 - 9x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(4x^2 - 9x + 2)}{x} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta \mu x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} = -1.$$

Άρα η f' δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$\text{Επομένως : } f''(x) = \begin{cases} 12x^2 - 18x + 2, & x < 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f με $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$ όπου g, h

παραγωγίσιμες συναρτήσεις, βρίσκουμε την παράγωγο της f για $x < x_0$ και για $x > x_0$ με την χρήση των κανόνων παραγωγίσιμης και εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 που αλλάζει τύπο, με την βοήθεια του ορισμού της $f'(x_0)$.

Για να βρούμε την δεύτερη παράγωγο της f ακολουθούμε αντίστοιχη διαδικασία με αυτή του (α) υποερωτήματος, αλλά για την f' .

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - (\beta - 2)x^2 + (2\gamma + 1)x - e^{\eta\mu\gamma}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, -17)$ και η $C_{f''}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2.

Λύση

Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\alpha x^3 - (\beta - 2)x^2 + (2\gamma + 1)x - e^{\eta\mu\gamma}]' = 3\alpha x^2 - 2(\beta - 2)x + (2\gamma + 1) - 0 = \\ &= 3\alpha x^2 - 2(\beta - 2)x + (2\gamma + 1). \end{aligned}$$

$$f''(x) = [3\alpha x^2 - 2(\beta - 2)x + (2\gamma + 1)]' = 6\alpha x - 2(\beta - 2).$$

Επειδή τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, -17)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της f' και το σημείο

$\Gamma(0, 2)$ στην γραφική παράσταση της f'' , έχουμε:

$$f'(1) = 2 \Leftrightarrow 3\alpha - 2(\beta - 2) + (2\gamma + 1) = 2 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta + 2\gamma = -3 \quad (1),$$

$$f'(2) = -17 \Leftrightarrow 12\alpha - 4(\beta - 2) + (2\gamma + 1) = -17 \Leftrightarrow 12\alpha - 4\beta + 2\gamma = -26 \quad (2) \text{ και}$$

$$f''(0) = 2 \Leftrightarrow -2(\beta - 2) = 2 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Για $\beta = 1$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow 3\alpha + 2\gamma = -1,$$

$$(2) \Leftrightarrow 12\alpha + 2\gamma = -22 \Leftrightarrow 2\gamma = -22 - 12\alpha.$$

$$\text{Άρα } 3\alpha - 22 - 12\alpha = -1 \Leftrightarrow -9\alpha = 21 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{7}{3} \text{ και } 2\gamma = -22 + 12 \cdot \frac{7}{3} \Leftrightarrow 2\gamma = 6 \Leftrightarrow \gamma = 3.$$

$$\text{Επομένως } \alpha = -\frac{7}{3}, \beta = 1 \text{ και } \gamma = 3.$$

Μεθοδολογία

Όταν μας δίνεται συνάρτηση f η οποία περιέχει παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και θέλουμε να τις προσδιορίσουμε, τότε από ιδιότητες της f ή και των παραγώγων της βρίσκουμε σύστημα με αγνώστους τις παραμέτρους, από όπου και τις προσδιορίζουμε.

Παράδειγμα 5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και f άρτια.

α) Να δείξετε ότι f' περιττή.

β) Αν $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$, $f'(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2$ και $(g \circ f)(x) = \eta\mu(2x^2 - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $g'(1)$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(-x) = f(x)$.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε :

$$[f(-x)]' = [f(x)]' \Leftrightarrow f'(-x)(-x)' = f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x) \text{ (} f' \text{ περιττή).}$$

Μεθοδολογία

Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την χρήση του ορισμού της άρτιας συνάρτησης και τους κανόνες παραγωγίσισης αποδεικνύεται ότι η f' είναι περιττή.

(Με ανάλογη διαδικασία αν f περιττή και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι f' είναι άρτια.)

$$\beta) \text{ Έχουμε : } (g \circ f)(x) = \eta\mu(2x^2 - 1) \Leftrightarrow g(f(x)) = \eta\mu(2x^2 - 1)$$

Επειδή μια τουλάχιστον από τις συναρτήσεις $\eta\mu(2x^2 - 1)$, $g(f(x))$ ξέρουμε ότι είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων), έχουμε:

$$[g(f(x))]' = [\eta\mu(2x^2 - 1)]' \Leftrightarrow g'(f(x))f'(x) = \sigma\upsilon\nu(2x^2 - 1)(2x^2 - 1)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(f(x))f'(x) = 4x\sigma\upsilon\nu(2x^2 - 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ έχουμε :

$$g'\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu 0 \stackrel{f' \text{ περιττή}}{\Leftrightarrow} g'(1)\left[-f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow g'(1) \cdot (-2) = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow g'(1) = -\sqrt{2}.$$

Μεθοδολογία

Αν $(g \circ f)(x) = h(x)$ (1) με:

- i) την f να είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η g παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$, τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ ή
- ii) την h να είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) προκύπτει συναρτησιακή σχέση η οποία για $x = x_0$ γνωρίζοντας τα $f(x_0)$, $f'(x_0)$ (βρίσκουμε το $f'(x_0)$ εφόσον f' περιττή), προκύπτει εξίσωση με μόνο άγνωστο το $g'(x_1)$ που η επίλυσή της μας δίνει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 6.

Έστω συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2}, \text{ όπου } x_1, x_2 \text{ ρίζες της } f.$$

Λύση

Επειδή x_1, x_2 ρίζες της f , έχουμε:

$$f(x) = \alpha(x-x_1)(x-x_2) \text{ άρα } |f(x)| = |\alpha(x-x_1)(x-x_2)|.$$

Για $x \neq x_1$ και $x \neq x_2$, λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη προκύπτει:

$$\ln |f(x)| = \ln |\alpha(x-x_1)(x-x_2)| \Leftrightarrow \ln |f(x)| = \ln |\alpha| + \ln |x-x_1| + \ln |x-x_2|.$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη οπότε:

$$(\ln |f(x)|)' = (\ln |\alpha| + \ln |x-x_1| + \ln |x-x_2|)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2}.$$

Μεθοδολογία

Σε συναρτήσεις με τύπο της μορφής: $f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)$ (1) πολλές φορές μας διευκολύνει να τις παραγωγίσουμε ακολουθώντας τα εξής βήματα:

- Παίρνω απόλυτη τιμή στην ισότητα (1) και προκύπτει $|f(x)| = |f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)|$ (2)
- Για κάθε τιμή του x που δεν μηδενίζει τα μέλη της (2) λογαριθμίζω με νεπέριο λογάριθμο και τα δύο μέλη της.
- Παραγωγίζω στην ισότητα που προκύπτει και υπολογίζω την $f'(x)$ (ή την $\frac{f'(x)}{f(x)}$).

Παράδειγμα 7.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - 1}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$

Λύση

i. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2^x \ln 2$.

Είναι $f(0) = 1$. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2^0 \ln 2 = \ln 2$$

ii. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x - 1$. Είναι $f(0) = 1$. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

iii. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\eta\mu x - 1$. Είναι $f(0) = 1$.

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = -\eta\mu 0 - 1 = -1$$

iv. Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^x$, $x > 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$. Είναι $f(1) = 1$. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1^1(1 + \ln 1) = 1$$

Μεθοδολογία

Ας υποθέσουμε ότι μας ζητείται να υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, όπου $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ με $x \neq x_0$ και f συνάρτηση που παραγωγίζεται στο x_0 , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Αν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τον αριθμό $f'(x_0)$ με την βοήθεια των κανόνων παραγωγίσης, θα έχουμε προσδιορίσει το ζητούμενο όριο.

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

- i. Έστω $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, γνησίως μονότονη και συνεχής. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) \neq 0$ και η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε: η f^{-1} παραγωγίζεται στο $f(x_0)$ και ισχύει $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, να βρείτε τον αριθμό $(f^{-1})'(1)$.

Λύση

- i. Αφού η f είναι συνεχής και γνήσια μονότονη τότε το σύνολο τιμών $f(\alpha, \beta)$ θα είναι ανοικτό διάστημα. Έστω το ανοικτό διάστημα (γ, δ) .

Θέτουμε $y_0 = f(x_0)$. Έστω $y \in (\gamma, \delta)$ με $y \neq y_0$.

Αφού η f είναι 1-1 υπάρχει μοναδικό $x \in (\alpha, \beta)$ ώστε $y = f(x)$. Είναι $x \neq x_0$.

Αφού η f^{-1} είναι συνεχής, αν $y \rightarrow y_0$ τότε $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y_0) \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$.

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Άρα η f^{-1} παραγωγίζεται στο $y_0 = f(x_0)$ με

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ή} \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Έχουμε $f'(x) = e^x + 1$ και $f(0) = e^0 + 0 \Rightarrow f(0) = 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 2 \neq 0$.

Άρα η f^{-1} παραγωγίζεται στο $1 = f(0)$ με

$$(f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

Μεθοδολογία

Η αντίστροφη συνάρτηση της f παραγωγίζεται στο σημείο $f(x_0)$ του πεδίου ορισμού της, αν η f παραγωγίζεται σε σημείο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$ και η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$, οπότε η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης στο σημείο $f(x_0)$, θα δίνεται από τον τύπο

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 30/8/2011