

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

[Κεφάλαιο 2.1: Πρόβλημα εφαπτομένης του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Έστω μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x - 3 \quad (1)$$

Να βρείτε:

- i) την παράγωγο της f στο $x_0 = 2$.
- ii) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$

Λύση

- i) Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$\left[f(e^x + 1) \right]' = (e^{2x} + e^x - 3)' \Leftrightarrow f'(e^x + 1) \cdot (e^x + 1)' = (e^{2x} + e^x - 3)' \Leftrightarrow$$

$$f'(e^x + 1) \cdot e^x = 2e^{2x} + e^x \Leftrightarrow f'(e^x + 1) \cdot e^x = e^x \cdot (2e^x + 1) \Leftrightarrow$$

$$f'(e^x + 1) = 2e^x + 1 \quad (2), \text{ κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ από την (2) παίρνουμε

$$f'(e^0 + 1) = 2e^0 + 1 \Leftrightarrow \boxed{f'(2) = 3}$$

- ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι η:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \quad (3)$$

Η (1) για $x = 0$ δίνει: $f(e^0 + 1) = e^0 + e^0 - 3 \Leftrightarrow f(2) = -1$ οπότε από την (3) έχουμε:

$$y - (-1) \stackrel{(i)}{=} 3 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y + 1 = 3x - 6 \Leftrightarrow \boxed{y = 3x - 7}$$

που είναι και η ζητούμενη εφαπτομένη.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$, βρίσκουμε την $f'(x_0)$ και χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στην γραφική παράσταση της f , που διέρχονται από το σημείο $M(0, -4)$.

Λύση

Είναι $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής τότε έχουμε:

$$f'(x_0) = 2x_0 \text{ και } f(x_0) = x_0^2$$

Η εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο A είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \quad (1)$$

Επειδή τώρα, η (ε) διέρχεται από το $M(0, -4)$ οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1), οπότε η τελευταία για $x = 0$ και $y = -4$ δίνει:

$$-4 - x_0^2 = 2x_0(-x_0) \Leftrightarrow -4 - x_0^2 = -2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ ή } x_0 = -2$$

Για τις τιμές που προσδιορίσαμε, από την (1) έχουμε:

- Για $x_0 = 2$

$$y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 4x - 8 \Leftrightarrow y = 4x - 4$$

- Για $x_0 = -2$

$$y - 4 = -4(x + 2) \Leftrightarrow y - 4 = -4x - 8 \Leftrightarrow y = -4x - 4$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , από ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$ που δεν ανήκει στη C_f χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1) \text{ και προσδιορίζουμε το } x_0 \text{ θέτοντας στην (1), } x = \alpha \text{ και } y = \beta.$$

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$. Να βρείτε σε ποιο σημείο A της C_f η εφαπτομένη:

- i) Έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 5$.
- ii) Είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 3x + y - 5 = 0$.
- iii) Είναι κάθετη στην διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου των αξόνων.
- iv) Είναι παράλληλη στον $x'x$.
- v) Σχηματίζει γωνία $\hat{\omega} = 135^\circ$ με τον $x'x$.

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στα σημεία επαφής.

Λύση

Είναι $f'(x) = 2x - 1$ με $x \in \mathbb{R}$, οπότε αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της C_f , ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο A είναι:

$$f'(x_0) = 2x_0 - 1$$

Επομένως:

$$i) \quad \lambda = 5 \Leftrightarrow f'(x_0) = 5 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 5 \Leftrightarrow 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 3 \text{ και } f(3) = 6$$

Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το $A(3, 6)$, και η εξίσωση της

εφαπτομένης στο A είναι η:

$$y - 6 = 5(x - 3) \Leftrightarrow y - 6 = 5x - 15 \Leftrightarrow y = 5x - 9.$$

$$ii) \quad \varepsilon \parallel \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\delta \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = -3 \Leftrightarrow 2x_0 = -2 \Leftrightarrow x_0 = -1 \\ \text{και } f(-1) = 2.$$

Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το $A(-1, 2)$, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η:

$$y - 2 = -3(x + 1) \Leftrightarrow y - 2 = -3x - 3 \Leftrightarrow y = -3x - 1.$$

iii) Η διχοτόμος του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου είναι η ευθεία (ζ): $y = x$ οπότε η εφαπτομένη (ε) είναι κάθετη στην (ζ) όταν και μόνο όταν:

$$\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\zeta} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow$$

$$2x_0 - 1 = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ και } f(0) = 0.$$

Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το $A(0, 0)$, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η: $y = -x$.

iv) $\varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ και

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η: $y = -\frac{1}{4}$.

v) $\hat{\omega} = 135^\circ \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\varphi 135^\circ \Leftrightarrow f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 0$
και $f(0) = 0$

Δηλαδή το σημείο επαφής είναι το $A(0, 0)$, και η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η: $y = -x$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο

$A(x_0, f(x_0))$, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , η οποία έχει μια ειδική θέση (παράλληλη, κάθετη, κτλ.) προσδιορίζουμε το x_0 από την συνθήκη που ικανοποιεί ο συντελεστής διεύθυνσης $f'(x_0)$.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

A) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$.

B) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f με την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

Λύση

A) Επειδή $f(1) = 1^3 = 1$ και $f'(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, είναι:

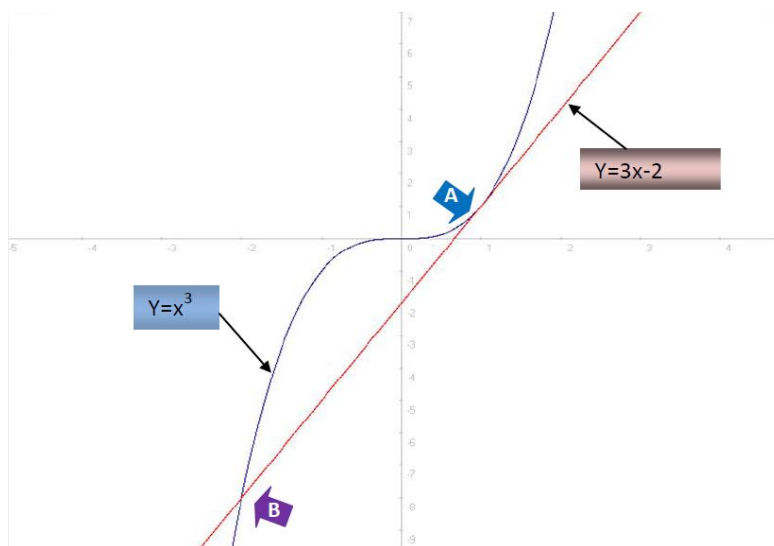
$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1^3 = 3 \cdot 1^2(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 2$$

B) Τα κοινά σημεία της C_f με την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ προσδιορίζονται από την λύση της εξίσωσης:

$$f(x) \stackrel{(A)}{=} 3x - 2 \Leftrightarrow x^3 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Από το ερώτημα (A) μια λύση της (1) είναι η $x_0 = 1$. Για την εύρεση των άλλων λύσεων της (1), εργαζόμενοι κατά τα γνωστά με το σχήμα Horner παίρνουμε:
 $x = 1$ και $x = -2$.

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα: $A(1, 1)$ και $B(-2, -8)$.



Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο

$A(x_0, f(x_0))$, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , με την C_f , λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Παράδειγμα 5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2κx + 3κ + 4$, $κ \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του $κ$ για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + 2κ$ οπότε η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 & (1) \\ \text{και} \\ f(x_0) = 0 & (2) \end{cases}$$

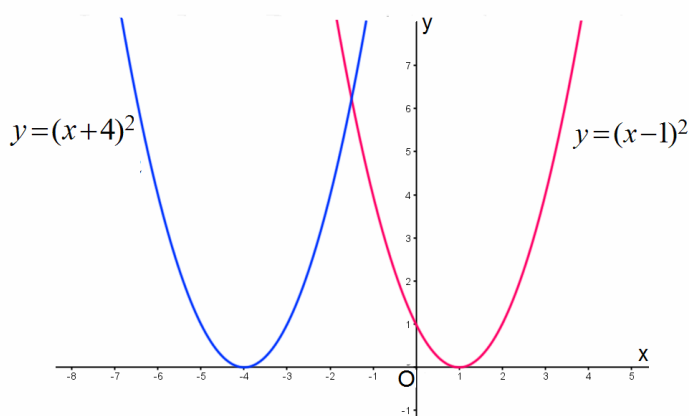
Είναι:

- (1) $\Leftrightarrow 2x_0 + 2κ = 0 \Leftrightarrow 2x_0 = -2κ \Leftrightarrow \boxed{x_0 = -κ}$ (3)
- (2) $\Leftrightarrow x_0^2 + 2κx_0 + 3κ + 4 = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (-κ)^2 + 2κ(-κ) + 3κ + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $κ^2 - 2κ^2 + 3κ + 4 = 0 \Leftrightarrow -κ^2 + 3κ + 4 = 0 \Leftrightarrow κ^2 - 3κ - 4 = 0$

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \text{ άρα } κ_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}, \text{ οπότε: } κ = -1 \text{ ή } κ = 4$$

Άρα η C_f εφάπτεται στον $x'x$ για τις τιμές: $κ = -1$ και $κ = 4$

Οι γραφικές παραστάσεις της f για τις τιμές του $κ$ που υπολογίσαμε φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Μεθοδολογία

Για να εφάπτεται η C_f στον $x'x$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ όπου η f είναι παραγωγίσιμη, πρέπει:
 $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$

Παράδειγμα 6.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = 2x - 3$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 4x - 2$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + 4$ οπότε η ευθεία (ε) εφάπτεται στην C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 2 & (1) \\ \text{και} \\ f(x_0) = 2x_0 - 3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_0 + 4 = 2 \\ f(x_0) = 2x_0 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 2 - 4 \\ x_0^2 + 4x_0 - 2 = 2x_0 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = -2 \\ x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ (x_0 + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -1$$

Άρα η ευθεία (ε) εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(-1, -5)$.

Μεθοδολογία

Για να εφάπτεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ στην C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ πρέπει οι εξισώσεις:

$$f'(x_0) = \alpha \text{ και } f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$$

να έχουν κοινή λύση.

Παράδειγμα 7.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 3)$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 4x - 5$.

Το $A(0, 3)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f αφού την επαληθεύει, πράγματι για $x_0 = 0$, ισχύει $f(x_0) = f(0) = 3$.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ στο σημείο $A(0, 3)$ είναι:
 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ (1)

Όμως $f(0) = 3$ και $f'(0) = -5$.

Οπότε η (1) γίνεται: $y - 3 = -5(x - 0) \Leftrightarrow y = -5x + 3$.

Μεθοδολογία

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Παράδειγμα 8.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 9, & x < 2 \\ x^3 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$.

- i. Να αποδείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.
- iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $B(-1, f(-1))$.

Λύση

- i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 3$.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 9 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} [3(x + 2)] = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 5 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

Άρα $f'(2) = 12$.

- ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(2, f(2))$ δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$y - 3 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 21.$$

- iii. Το σημείο $B(-1, f(-1))$ ανήκει στον πρώτο κλάδο της C_f , οπότε για $x < 2$ έχουμε $f(x) = 3x^2 - 9$, με $f'(x) = 6x$ έτσι $f(-1) = -6$ και $f'(-1) = -6$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(-1, f(-1))$ είναι:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y + 6 = -6(x + 1) \Leftrightarrow y = -6x - 12.$$

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε συνάρτηση f διπλού τύπου και θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο x_0 , στο οποίο αλλάζει τύπο, εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της μόνο με τον ορισμό της παραγώγου στο x_0 .

Αφού βρούμε την $f'(x_0)$, χρησιμοποιούμε τον τύπο της εφαπτομένης:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Παράδειγμα 9.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 5x + 4$.

Να βρείτε σε ποιο σημείο της C_f η εφαπτομένη:

- i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$.
- ii. Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- iii. Τέμνει τον άξονα $x'x$ υπό γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.
- iv. Είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: -x - 5y + 2011 = 0$.
- v. Είναι παράλληλη στην διχοτόμο του $2^{\text{ου}}$ και του $4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου των αξόνων.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο επαφής.

Λύση

Έχουμε $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ με $f'(x) = -2x + 5$.

Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, που έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0) = -2x_0 + 5$ και τύπο:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Επομένως:

- i. Η εφαπτομένη (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ δηλαδή

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -2x_0 + 5 = -3 \Leftrightarrow x_0 = 4 \text{ οπότε } f(x_0) = f(4) = 8.$$

Άρα $A(4, 8)$ το σημείο επαφής και η εξίσωση της εφαπτομένης

$$(\varepsilon): y - 8 = -3(x - 4) \Leftrightarrow y = -3x + 20.$$

- ii. Η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στον $x'x$ οπότε

$$\varepsilon // x'x \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{5}{2} \text{ έτσι } f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{41}{4}.$$

Άρα $B\left(\frac{5}{2}, \frac{41}{4}\right)$ το σημείο επαφής και η εξίσωση της εφαπτομένης

$$(\varepsilon): y - \frac{41}{4} = 0 \left(x - \frac{5}{2} \right) \Leftrightarrow y = \frac{41}{4}.$$

iii. Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον $x'x$ υπό γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ δηλαδή

$$f'(x_0) = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -2x_0 + 5 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ οπότε } f(2) = 10, f'(2) = 1.$$

Άρα $\Gamma(2, 10)$ το σημείο επαφής και η εξίσωση της εφαπτομένης

$$(\varepsilon): y - 10 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x + 8$$

iv. Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: -x - 5y + 2011 = 0$ δηλαδή

$$\varepsilon \perp \delta \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow (-2x_0 + 5) \left(-\frac{1}{5} \right) = -1 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$$\text{οπότε } f(0) = 4, f'(0) = 5.$$

Άρα $\Delta(0, 4)$ το σημείο επαφής και η εξίσωση της εφαπτομένης

$$(\varepsilon): y - 4 = 5(x - 0) \Leftrightarrow y = 5x + 4.$$

v. Η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην διχοτόμο του $2^{\text{ου}}$ και του $4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου των αξόνων άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$ δηλαδή

$$f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow -2x_0 + 5 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3 \text{ οπότε } f(3) = 10, f'(3) = -1.$$

Άρα $E(3, 10)$ το σημείο επαφής και η εξίσωση της εφαπτομένης

$$(\varepsilon): y - 10 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 13.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , η οποία πληροί μια συνθήκη από την οποία γνωρίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης της λ , προσδιορίζουμε το σημείο επαφής της ε με την C_f από την εξίσωση $f'(x_0) = \lambda$

Παράδειγμα 10.

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = 2(x+3) \cdot \sin x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^2 x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ στα οποία η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) &= (2(x+3) \cdot \sin x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^2 x)' = \\ &= (2(x+3) \cdot \sin x \cdot \eta\mu x)' - (\eta\mu^2 x)' = \\ &= (2(x+3))' \sin x \cdot \eta\mu x + 2(x+3)(\sin x)' \eta\mu x + 2(x+3) \cdot \sin x (\eta\mu x)' - 2\eta\mu x (\eta\mu x)' = \\ &= 2\sin x \cdot \eta\mu x - 2(x+3)\eta\mu^2 x + 2(x+3) \cdot \cos^2 x - 2\eta\mu x \sin x = \\ &= -2(x+3)\eta\mu^2 x + 2(x+3) \cdot \cos^2 x = 2(x+3)[- \eta\mu^2 x + \cos^2 x] = \\ &= 2(x+3)[1 - 2\eta\mu^2 x]. \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

$$\text{Έχουμε } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2(x_0+3)[1 - 2\eta\mu^2 x_0] = 0 \text{ άρα}$$

$$\eta\mu x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{4} \text{ ή}$$

$$\eta\mu x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{\pi}{4} \text{ ή}$$

$$x_0 = -3 \text{ που απορρίπτεται αφού } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{οπότε } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{2} \text{ και } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{7}{2}.$$

$$\text{Άρα } A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{5}{2}\right) \text{ και } B\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - \frac{7}{2}\right) \text{ είναι τα σημεία επαφής της } C_f \text{ στα οποία οι}$$

εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το σημείο, $(x_0, f(x_0))$ της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη πληροί δοσμένες συνθήκες (παράλληλη, κάθετη, τέμνει το άξονα $x'x$ υπό γωνία, κ.τ.λ.) προσδιορίζουμε το x_0 από την συνθήκη που ικανοποιεί ο συντελεστής διεύθυνσης $f'(x_0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x - 6, & \text{αν } x \leq -1 \\ x^2 + 9x - 3, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Λύση

- i) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ θα πρέπει τα όρια

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ να είναι ίσα και να ανήκουν στο $\mathbb{R}$.

Επειδή:

$$f(-1) = (-1)^3 + 4(-1) - 6 \Leftrightarrow f(-1) = -1 - 4 - 6 \Leftrightarrow f(-1) = -11,$$

έχουμε:

- Για $x < -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 4x - 6 + 11}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 4x + 5}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 5)}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - x + 5) = (-1)^2 - (-1) + 5 = 7$$

- Για $x > -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 9x - 3 + 11}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 9x + 8}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x + 8)}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 8) = 7$$

Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$, με $f'(-1) = 7$.

Σημείωση: Ο αριθμητής παραγοντοποιείται με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

$$x^3 + 4x + 5 = (x + 1)(x^2 - x + 5)$$

1	0	4	5	(-1)
	-1	1	-5	
1	-1	5	0	

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = -1$ είναι:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad (1)$$

Εξάλλου: $f(-1) = -11$ και $f'(-1) = 7$ και επομένως:

$$(1) \Leftrightarrow y - (-11) = 7(x + 1) \Leftrightarrow y + 11 = 7x + 7 \Leftrightarrow y = 7x - 4$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εφαπτομένη μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 όπου η f αλλάζει τύπο, βρίσκουμε με τα πλευρικά όρια (ορισμός) την $f'(x_0)$ και στη συνέχεια κατά τα γνωστά την εξίσωσή της.

Παράδειγμα 2.

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ όπου

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ και } g(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + 2.$$

Λύση

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ και η g στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 2\alpha x + 2\beta$, για να έχουν κοινή εφαπτομένη οι C_f, C_g στο $x_0 = 1$ πρέπει:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = -\alpha - 2 \\ 2\beta = 1 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = -\alpha - 2 \\ -\alpha - 2 = 1 - 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = -\alpha - 2 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Μεθοδολογία

Για να έχει η C_f και η C_g κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο x_0 πρέπει να ισχύουν:

$$f(x_0) = g(x_0) \text{ και } f'(x_0) = g'(x_0).$$

Παράδειγμα 3.

1. Αν f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ , δείξτε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη (ε) σε δύο διαφορετικά σημεία, $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ με $\alpha, \beta \in \Delta$, όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha) = g(\beta) - \beta \cdot g'(\beta) \end{cases}$$

2. Να βρεθούν σε μη κοινά σημεία οι κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όταν $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

Λύση

1. Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g σε δύο διαφορετικά σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ του Δ . Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο α και η g στο β , έχουμε:

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha)$$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο B είναι η:

$$(\varepsilon_2): y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x + g(\beta) - \beta \cdot g'(\beta)$$

Κατά τα γνωστά πλέον, οι (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται όταν και μόνο όταν:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) & (1) \\ f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha) = g(\beta) - \beta \cdot g'(\beta) & (2) \end{cases}$$

2. Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ δύο διαφορετικά σημεία επαφής μιας κοινής εφαπτομένης των C_f και C_g . Λόγω του ερωτήματος (1) έχουμε:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) & (1) \\ f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha) = g(\beta) - \beta \cdot g'(\beta) & (2) \end{cases}$$

Εξάλλου, $f'(x) = 2x - 4$ και $g'(x) = 2x + 2$, οπότε:

- $(1) \Leftrightarrow f'(\alpha) = g'(\beta) \Leftrightarrow 2\alpha - 4 = 2\beta + 2 \Leftrightarrow \alpha = \beta + 3 \quad (3)$

- (2) $\Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 5 - \alpha(2\alpha - 4) = \beta^2 + 2\beta - 4 - \beta(2\beta + 2) \Leftrightarrow$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 5 - 2\alpha^2 + 4\alpha = \beta^2 + 2\beta - 4 - 2\beta^2 - 2\beta \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow \beta^2 \stackrel{(3)}{=} (\beta + 3)^2 - 9 \Leftrightarrow \beta^2 = \beta^2 + 6\beta + 9 - 9 \Leftrightarrow 6\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$$

Τέλος με $\beta = 0$ από την (3) παίρνουμε $\alpha = 3$ και επομένως από την (1) η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y = f'(3)x + f(3) - 3f'(3) \Leftrightarrow y = 2x + 2 - 3 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$y = 2x - 4$$

Παράδειγμα 4.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1, -2)$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 4x - 5$. Το $A(1, -2)$ δεν είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f αφού δεν την επαληθεύει. Πράγματι για $x = 1$, είναι $f(1) = 0 \neq -2$.

Αν $B(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης ε με την C_f , τότε η ε έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ με $f(x_0) = 2x_0^2 - 5x_0 + 3$ και $f'(x_0) = 4x_0 - 5$. Δηλαδή η ε έχει εξίσωση $y - (2x_0^2 - 5x_0 + 3) = (4x_0 - 5)(x - x_0)$ (1).

Ακόμα η (ε) διέρχεται από το $A(1, -2)$, άρα οι συντεταγμένες του, την επαληθεύουν, έτσι για $x = 1$ και $y = -2$ η (1) γίνεται:

$$-2 - (2x_0^2 - 5x_0 + 3) = (4x_0 - 5)(1 - x_0) \Leftrightarrow$$

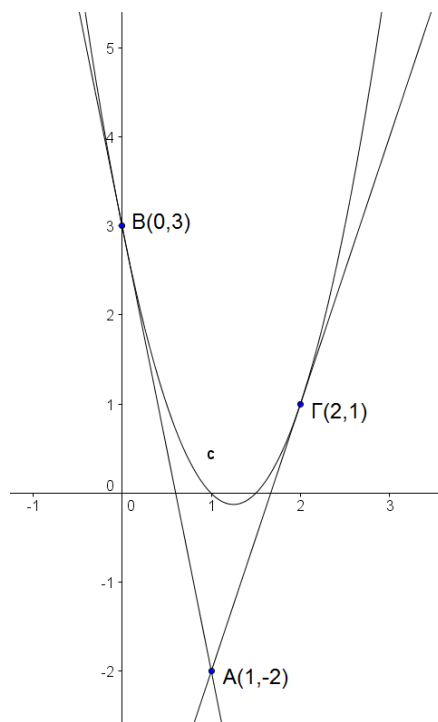
$$-2 - 2x_0^2 + 5x_0 - 3 = 4x_0 - 4x_0^2 - 5 + 5x_0 \Leftrightarrow$$

$$2x_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow 2x_0(x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = 2.$$

Για $x_0 = 0$, είναι $f(0) = 3$ και $f'(0) = -5$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(0, 3)$ είναι:
 $y - 3 = -5(x - 0) \Leftrightarrow y = -5x + 3$.

Για $x_0 = 2$, είναι $f(2) = 1$ και $f'(2) = 3$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\Gamma(2, 1)$ είναι:
 $y - 1 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 5$.



Μεθοδολογία

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από σημείο $A(x_A, y_A)$ που δεν ανήκει στην C_f , εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι το σημείο επαφής είναι το $B(x_0, y_0)$ και γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο αυτό. Στη συνέχεια απαιτούμε οι

συντεταγμένες του $A(x_A, y_A)$ να επαληθεύουν την εξίσωση της ε . Έτσι προσδιορίζουμε το σημείο επαφής $B(x_0, y_0)$.

Παράδειγμα 5.

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 5, & x < -1 \\ \alpha \beta x^3 - 3, & x \geq -1 \end{cases}$.

- i. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ όταν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Λύση

- i. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$, είναι και συνεχής στο $x_0 = -1$, δηλαδή ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\alpha + 5$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = -\alpha\beta - 3$. Επομένως $-\alpha + 5 = -\alpha\beta - 3 \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha - 8$ (1).

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$, άρα ισχύει:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \quad \text{ή}$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\alpha x + 5 + \alpha - 5}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha \beta x^3 - 3 + \alpha \beta + 3}{x + 1} \quad \text{ή}$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\alpha(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha \beta (x^3 + 1)}{x + 1} \quad \text{ή}$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (\alpha) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [\alpha \beta (x^2 - x + 1)]$$

άρα $f'(-1) = \alpha = 3\alpha\beta$ όμως $-\alpha + 5 = -\alpha\beta - 3 \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha - 8$, οπότε

$$\alpha = 3\alpha - 24 \Leftrightarrow \alpha = 12 \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{3}.$$

Επομένως $\alpha = 12$ και $\beta = \frac{1}{3}$, με $f(-1) = -7$ και $f'(-1) = 12$.

- ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(-1, f(-1))$ δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$$

$$y + 7 = 12(x + 1) \Leftrightarrow y = 12x + 5.$$

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε συνάρτηση f διπλού τύπου με παραμέτρους που είναι παραγωγίσιμη και θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο x_0 , στο οποίο η συνάρτηση f αλλάζει τύπο, εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας και της παραγώγου στο x_0 .

Αφού βρούμε τις παραμέτρους βρίσκουμε την $f(x)$, την $f'(x)$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο της εφαπτομένης: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Παράδειγμα 6.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - \frac{3}{4} \text{ να εφάπτεται στον άξονα } x'x.$$

Λύση

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = \left(x^2 + \alpha x + \alpha - \frac{3}{4} \right)' = 2x + \alpha.$$

Για να εφάπτεται η C_f στον άξονα $x'x$ θα πρέπει να υπάρχει x_0 ώστε: $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$.

$$\text{Έτσι } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + \alpha = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\text{και } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + \alpha x_0 + \alpha - \frac{3}{4} = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(-\alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 1 \text{ ή } \alpha = 3.$$

Άρα για $\alpha = 1$ ή $\alpha = 3$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

Μεθοδολογία

Για να εφάπτεται η C_f στον άξονα $x'x$ θα πρέπει να υπάρχει x_0 ώστε: $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$.

Παράδειγμα 7.

Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 8x - 21$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 4x - 9$.

Λύση

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y = 8x - 21$ στη C_f , θα πρέπει να υπάρχει κοινή λύση των:

$$f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \text{ και } f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = \alpha.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6x - 4$.

$$\text{Έτσι } f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = \alpha \Leftrightarrow 6x_0 - 4 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

$$\text{και } f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4x_0 - 9 = 8x_0 - 21 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Αφού $x_0 = 2$ είναι κοινή λύση, επομένως η ευθεία $\varepsilon: y = 8x - 21$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(2, -5)$.

Μεθοδολογία

Για να εφάπτεται μια ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ στη C_f σε ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα πρέπει να υπάρχει κοινή λύση των:

$$f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \text{ και } f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = \alpha.$$

Παράδειγμα 8.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3\alpha x + 4\alpha$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + 1$.

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται της C_f .

Λύση

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + 1$ στη C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, θα πρέπει να υπάρχει κοινή λύση των: $f(x_0) = \alpha x_0 + 1$ και $f'(x_0) = \lambda_\varepsilon$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 3\alpha$.

$$\text{Έτσι } f'(x_0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow 2x_0 - 3\alpha = \alpha \Leftrightarrow x_0 = 2\alpha \quad (1)$$

$$\text{και } f(x_0) = \alpha x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 3\alpha x_0 + 4\alpha = \alpha x_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 4\alpha x_0 + 4\alpha - 1 = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -4\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συνάρτηση f και ευθεία με παραμέτρους και ζητείται η τιμή της παραμέτρου, ώστε η ευθεία να εφάπτεται της C_f σε ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα πρέπει να υπάρχει κοινή λύση των:

$$f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \text{ και } f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = \alpha.$$

Παράδειγμα 9.

Δίνεται ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 7$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $A(2, f(2))$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης $h(x) = f^3(x) + (2-x)f(x) + 7x$ στο σημείο της $B(2, h(2))$.

Λύση

Για $x \in \mathbb{R}$ η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = (f^3(x) + f(x)(2-x) + 7x)' =$$

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x)(2-x) - f(x) + 7.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο $B(2, h(2))$ είναι:

$$y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - h(2) = h'(2)(x - 2)$$

Αφού η f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(2, f(2))$ την ευθεία

$$(\varepsilon): -2x + y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 7 \text{ ισχύει: } f(2) = 4 - 7 = -3 \text{ και } f'(2) = 2.$$

$$\text{Για } x_0 = 2 \text{ είναι } h(2) = f^3(2) + f(2)(2-2) + 7 \cdot 2 = -27 + 14 = -13$$

$$\text{και } h'(2) = 3f^2(2)f'(2) + f'(2)(2-2) - f(2) + 7 = 64.$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο $B(2, -13)$ είναι:

$$y + 13 = 64(x - 2) \Leftrightarrow y = 64x - 141.$$

Μεθοδολογία

Όταν η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$ και $f'(x_0) = \alpha$

Παράδειγμα 10.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\alpha + \beta)x + (\beta - 1)^2$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ όταν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, 2)$ διέρχεται από το $B(2, 5)$.

Λύση

Για $x \in \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x + \alpha + \beta$.

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από τα σημεία A, B θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 2}{2 - 1} = 3, \text{ ακόμα το } A(1, 2) \text{ είναι σημείο της } C_f \text{ άρα } x_0 = 1, f(x_0) = f(1) = 2$$

$$\text{οπότε } f'(x_0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(1) = 3 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \quad (1)$$

$$\text{Ακόμα } f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + (\beta - 1)^2 = 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (\beta - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Για $\beta = 1$ από την (1) παίρνουμε $\alpha = 0$.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται συνάρτηση που ο τύπος της περιέχει παραμέτρους, τις οποίες πρέπει να βρούμε, αν ξέρουμε ότι η εφαπτομένη της C_f σε σημείο της $A(x_0, y_0)$ διέρχεται και από άλλο γνωστό σημείο $B(x_B, y_B)$, εργαζόμαστε ως εξής:

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από τα σημεία A, B θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ έτσι } f'(x_0) = \lambda_\varepsilon \text{ και επίσης ισχύει } f(x_0) = y_0.$$

Παράδειγμα 11.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Λύση

Για να μην έχει η C_f εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) \neq 0$.

Έχουμε $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 - 4x + 3 \neq 0$, αφού $\Delta = -20 < 0$.

Άρα η C_f δεν έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι η C_f δεν έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$ αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα 12.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ και $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 3$

- (i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- (ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g σε κοινό τους σημείο.

Λύση (2 τρόποι επίλυσης)

A' Τρόπος:

Η $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

Η $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 6x^2 - 6x + 1$.

Έστω $A(x_0, y_0)$ το κοινό τους σημείο, οπότε για να υπάρχει κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο των C_f και C_g θα πρέπει να ισχύει: $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$.

$$\text{Οπότε } f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 4x_0 - 5 = 2x_0^3 - 3x_0^2 + x_0 - 3 \Leftrightarrow$$

$$x_0^3 - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 (x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -2 \quad (1)$$

Άρα τα κοινά σημεία των δύο συναρτήσεων είναι το $A(1, -3)$ και το $B(-2, -33)$.

$$\text{Ακόμα } f'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 4 = 6x_0^2 - 6x_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε κοινή λύση την $x_0 = 1$ άρα στο $A(1, -3)$ έχουν κοινή εφαπτομένη την:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y + 3 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 4.$$

Ενώ στο $B(-2, -33)$ δεν έχουν κοινή εφαπτομένη, απλώς τέμνονται.

B' Τρόπος:

(i) Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 2x^3 - 3x^2 + x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2$$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα $A(1, -3)$ και $B(-2, -33)$.

(ii) Βρίσκοντας κατά τα γνωστά τις εφαπτόμενες των C_f και C_g στα A και B διαπιστώνουμε ότι μόνο στο σημείο A έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $\varepsilon: y = x - 4$.

Μεθοδολογία

Για να υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ των C_f και C_g θα πρέπει να ισχύει: $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Παράδειγμα 13.

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Λύση

Για $x \in \mathbb{R}^*$, παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων δεν τέμνονται, αφού για να τέμνονται θα έπρεπε να ισχύει:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = -1 \text{ αδύνατο.}$$

Άρα αναζητούμε κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g σε μη κοινό τους σημείο.

Έστω (ε_1) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$, τότε η εξίσωση της θα είναι:
 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1 + f(x_1).$

Έστω (ε_2) η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_2, g(x_2))$, τότε η εξίσωση της θα είναι:
 $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x - g'(x_2)x_2 + g(x_2).$

Για να συμπίπτουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) θα πρέπει να ισχύει:

$$f'(x_1) = g'(x_2) \text{ και } -f'(x_1)x_1 + f(x_1) = -g'(x_2)x_2 + g(x_2).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x$ και

η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $g'(x) = \frac{2}{x^3}$.

$$\text{Οπότε } f'(x_1) = g'(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 = \frac{2}{x_2^3} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{x_2^3} \quad (1)$$

$$\text{και } -f'(x_1)x_1 + f(x_1) = -g'(x_2)x_2 + g(x_2) \Leftrightarrow$$

$$-2x_1^2 + x_1^2 = -\frac{2}{x_2^2} - \frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow -x_1^2 = -\frac{3}{x_2^2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_2^6} = \frac{3}{x_2^2} \Leftrightarrow$$

$$3x_2^6 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2(3x_2^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_2^4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \text{ ή } x_2 = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \text{ αφού } x_2 \neq 0.$$

Για $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ η κοινή εφαπτόμενη θα είναι:

$$y = g' \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) x - g' \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + g \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) \Leftrightarrow y = 2\sqrt[4]{3^3} x - 3\sqrt{3}.$$

Για $x_2 = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ η κοινή εφαπτόμενη θα είναι:

$$y = g' \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) x - g' \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) + g \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) \Leftrightarrow y = -2\sqrt[4]{3^3} x - 3\sqrt{3}.$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τη κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g σε μη κοινό τους σημείο έχουμε:

Αν (ε_1) είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$, τότε η εξίσωση της θα είναι:
 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1 + f(x_1).$

Αν (ε_2) είναι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_2, g(x_2))$, τότε η εξίσωση της θα είναι:
 $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x - g'(x_2)x_2 + g(x_2).$

Για να συμπίπτουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) θα πρέπει να ισχύει:

$$f'(x_1) = g'(x_2) \text{ και } -f'(x_1)x_1 + f(x_1) = -g'(x_2)x_2 + g(x_2).$$

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

1) Να βρεθεί η ευθεία (ε) στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(\kappa, \lambda)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι

$$\text{είναι συνεχής στο } -1 \text{ η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda|x+1| - 3\kappa\sqrt{x^2 + 2x + 1} + (x+1)^2}{x+1}, & x < -1 \\ -6, & x \geq -1 \end{cases}$$

2) Να εξετάσετε αν η προηγούμενη ευθεία (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -\frac{3}{2x}$.

Λύση

1) Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο -1 θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2\lambda|x+1| - 3\kappa\sqrt{x^2 + 2x + 1} + (x+1)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2\lambda|x+1| - 3\kappa|x+1| + |x+1|^2}{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|(2\lambda - 3\kappa + |x+1|)}{x+1} \stackrel{(x < -1 \Rightarrow x+1 < 0)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)(2\lambda - 3\kappa - x - 1)}{x+1} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow -1^-} (2\lambda - 3\kappa - x - 1) = 3\kappa - 2\lambda.$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -6 = f(-1)$$

Επομένως αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο -1 , τότε θα ισχύει: $3\kappa - 2\lambda = -6$.

Άρα τα σημεία $M(\kappa, \lambda)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση:

$$3x - 2y = -6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 3.$$

2) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$ οπότε έχουμε $g'(x) = \frac{3}{2x^2}$.

Για να εφάπτεται η ευθεία στη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο

$A(x_0, g(x_0))$, $x_0 \neq 0$ θα πρέπει να υπάρχει κοινή λύση των παρακάτω σχέσεων:

$$g(x_0) = y_0 \Leftrightarrow g(x_0) = \frac{3}{2}x_0 + 3 \Leftrightarrow \frac{-3}{2x_0} = \frac{3}{2}x_0 + 3 \Leftrightarrow -3 = 3x_0^2 + 6x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, \text{ (1)}$$

$$\text{και } g'(x_0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow g'(x_0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2x_0^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1, \text{ (2).}$$

Η κοινή λύση των **(1)** και **(2)** είναι η $x_0 = -1$.

Οπότε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(-1, g(-1))$ είναι η

$$y - g(-1) = g'(-1)(x + 1) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$$

Οπότε, η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_g .

Παράδειγμα 2.

Για μια συνάρτηση f ισχύει $x^2 + 6x \leq f(x) \leq x + \eta\mu 5x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x^2 + 6x \leq f(x) \leq \eta\mu 5x + x$ (1)

- i. Οπότε για $x = 0$ έχουμε $0 \leq f(0) \leq 0$ άρα $f(0) = 0$.
- ii. Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Δηλαδή ότι

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Για $x < 0$ από την (1) έχουμε $\frac{x^2 + 6x}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{\eta\mu 5x + x}{x}$ άρα

$$\frac{\eta\mu 5x}{x} + 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq x + 6.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5 \frac{\eta\mu 5x}{5x} \stackrel{u=5x}{=} 5 \lim_{x \rightarrow 0^- \Rightarrow u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 5$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu 5x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 5x}{x} + 1 = 6$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 6) = 6.$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 6$.

Για $x > 0$ από την (1) έχουμε $\frac{x^2 + 6x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu 5x + x}{x}$ άρα

$$x + 6 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu 5x}{x} + 1.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 \frac{\eta\mu 5x}{5x} \stackrel{u=5x}{=} 5 \lim_{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{u} = 5$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu 5x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 5x}{x} + 1 = 6$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 6) = 6.$$

$$\text{Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 6.$$

$$\text{Οπότε αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 6 \text{ είναι } f'(0) = 6.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 6x.$$

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 3x + x$.

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε τυχαίο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3\sigma\upsilon\nu 3x + 1$.

- i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε τυχαίο σημείο $(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (\eta\mu 3x_0 + x_0) = (3\sigma\upsilon\nu 3x_0 + 1)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = (3\sigma\upsilon\nu 3x_0 + 1)x - 3x_0\sigma\upsilon\nu 3x_0 + \eta\mu 3x_0 \quad (1)$$

- ii. Η (1) διέρχεται από το $(0, 0)$ άρα γίνεται:

$$0 = (3\sigma\upsilon\nu 3x_0 + 1)0 - 3x_0\sigma\upsilon\nu 3x_0 + \eta\mu 3x_0 \Leftrightarrow 3x_0\sigma\upsilon\nu 3x_0 - \eta\mu 3x_0 = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = 3x\sigma\upsilon\nu 3x - \eta\mu 3x$

η h είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων,

$$h\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\left(-3\frac{\pi}{6}\right) - \eta\mu\left(-3\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\left(3\frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu\left(3\frac{\pi}{3}\right) = -\pi$$

$$\text{και ισχύει } h\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot h\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\pi < 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } h(x_0) = 0, \text{ οπότε } 3x_0\sigma\upsilon\nu 3x_0 - \eta\mu 3x_0 = 0.$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/11/2016