

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

[Θεώρημα Rolle του κεφ.2.5 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^7 + 2x^3 + x + 3 = 0$ (1) έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Λύση

- Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^7 + 2x^3 + x + 3$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 = +\infty$, το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Αφού το $0 \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

- Το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης βρίσκεται με την εφαρμογή του Θ. Rolle.
Έστω ότι η (1) έχει δύο ρίζες x_1, x_2 δηλαδή $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα, αλλά $f'(x) = 7x^6 + 6x^2 + 1 > 0$ άτοπο. Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Άσκηση 2.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 + \alpha x + \beta = e^{2x}$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta - e^{2x}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε με την σε άτοπο απαγωγή.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις ρίζες. Τότε, αφού η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων άρα και συνεχής, από Θεώρημα του Rolle η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες. Και ομοίως η $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και η $f'''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Αλλά $f'(x) = 4x + \alpha - 2e^{2x}$, $f''(x) = 4 - 4e^{2x}$ και η $f'''(x) = -8e^{2x} \neq 0$ άτοπο, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ τρεις ρίζες.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να δείξετε με την βοήθεια της συνάρτησης $g(x) = e^{f(x)}(x - \alpha)(x - \beta)$, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{1}{\alpha - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}$.

Λύση

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .
- $g(\alpha) = g(\beta) = 0 \Rightarrow$ από Θεώρημα του Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

$$\text{Αλλά } g'(x) = e^{f(x)}f'(x)(x - \alpha)(x - \beta) + e^{f(x)}(x - \beta) + e^{f(x)}(x - \alpha).$$

$$\text{Για } x = x_0 \text{ έχουμε } g'(x_0) = e^{f(x_0)}f'(x_0)(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta) + e^{f(x_0)}(x_0 - \beta) + e^{f(x_0)}(x_0 - \alpha) = 0$$

$$\text{ή } f'(x_0)(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta) + (x_0 - \beta) + (x_0 - \alpha) = 0 \text{ ή}$$

$$f'(x_0)(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta) = (\alpha - x_0) + (\beta - x_0) \text{ ή}$$

$$f'(x_0) = \frac{(\alpha - x_0) + (\beta - x_0)}{(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta)} \text{ ή}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{\alpha - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}$$

Άσκηση 2.

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(x) \ln(x^2 + \alpha x)$ με $\alpha > -2$ και $f(x)$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2, 4]$ με $f(2) = 2 \cdot f(4) \neq 0$. Αν η $h(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[2, 4]$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 4)$ έτσι ώστε $f'(x_0) \ln x_0 + f(x_0) = 0$.

Λύση

- Επειδή η συνάρτηση $h(x) = f(x) \ln(x^2 + \alpha x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[2, 4]$, θα έχουμε $h(2) = h(4)$ ή $f(2) \ln(4 + 2\alpha) = f(4) \ln(16 + 4\alpha) \Leftrightarrow 2 \cdot f(4) \ln(4 + 2\alpha) = f(4) \ln(16 + 4\alpha)$
 $\Leftrightarrow 2 \cdot \ln(4 + 2\alpha) = \ln(16 + 4\alpha) \Leftrightarrow \ln(4 + 2\alpha)^2 = \ln(16 + 4\alpha)$
 $\Leftrightarrow (4 + 2\alpha)^2 = 16 + 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = -3$. Το $\alpha = -3$ απορρίπτεται, άρα $\alpha = 0$.

- Αν $\alpha = 0 \Rightarrow h(x) = f(x) \cdot \ln x^2 = 2f(x) \cdot \ln x$ με την $f(x)$ ορισμένη στο $[2, 4]$ και την $\ln x^2$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, τότε το πεδίο ορισμού της $h(x) = 2f(x) \cdot \ln x$ είναι η τομή των δύο συνόλων. Δηλαδή, το $D_h = [2, 4]$ και $h'(x) = 2f'(x) \ln x + f(x) \cdot \frac{2}{x}$.

Επειδή ισχύει το Θ. Rolle, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0$

$$\text{ή } 2f'(x_0) \ln x_0 + f(x_0) \cdot \frac{2}{x_0} = 0 \text{ ή } f'(x_0) \ln x_0 + f(x_0) \cdot \frac{1}{x_0} = 0 \text{ ή } x_0 \cdot f'(x_0) \ln x_0 + f(x_0) = 0$$

$$\text{ή } f'(x_0) \ln x_0 + f(x_0) = 0.$$

Άσκηση 3.

Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ έχει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ το πολύ δύο κοινά σημεία.

Λύση

Τα κοινά σημεία της ευθείας και της C_f βρίσκονται από την λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = e^x$ ή $e^x - \alpha x - \beta = 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^x - \alpha x - \beta$, η οποία ορίζεται στο $A = D_g = \mathbb{R}$.

Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες τότε, αφού η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων και άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Από το Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x) = 0$ ή $e^x - \alpha = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $g'(x) = e^x - \alpha$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής. Οπότε η εξίσωση $g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα, το οποίο είναι άτοπο γιατί $e^x > 0$.

Άρα η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ και η συνάρτηση $f(x) = e^x$ δεν έχουν τρία κοινά σημεία, επομένως έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Άσκηση 4.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-2} + x$ και $g(x) = e^{2-x} - x + 4$.

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο να προσδιοριστεί.

Λύση

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{x-2} + x = e^{2-x} - x + 4 \Leftrightarrow e^{x-2} - e^{2-x} + 2x - 4 = 0$, η οποία έχει προφανή λύση την $x_0 = 2$.

Θα δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι μοναδική με τη βοήθεια του θεωρήματος του Rolle.

Έστω ότι η εξίσωση $e^{x-2} - e^{2-x} + 2x - 4 = 0$ έχει δύο ρίζες τις $x_1 = 2, x_2$.

- Η συνάρτηση $h(x) = e^{x-2} - e^{2-x} + 2x - 4$ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$.
- $h(x_1) = 0 = h(x_2)$, άρα ισχύει το Θ. Rolle, έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ ή (x_2, x_1) τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0$. Όμως $h'(x) = e^{x-2} + e^{2-x} + 2 \neq 0$, άτοπο.

Άρα η εξίσωση $e^{x-2} - e^{2-x} + 2x - 4 = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Σημείωση: Η συνάρτηση $h(x) = e^{x-2} - e^{2-x} + 2x - 4$ είναι γνήσια αύξουσα ως άθροισμα γνήσια αυξουσών συναρτήσεων.

Οι συναρτήσεις e^{x-2} (σαν σύνθεση δύο αυξουσών συναρτήσεων των $e^x, x-2$), $-e^{2-x}$ (σαν σύνθεση δύο φθινουσών συναρτήσεων των $-e^x, 2-x$) και $2x-4$ είναι αύξουσες, άρα η εξίσωση $h(x) = e^{x-2} - e^{2-x} + 2x - 4 = 0$ έχει μοναδική λύση την $x_0 = 2$.

Άσκηση 5.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$ με $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' .

(Γενικές Εξετάσεις - 1990)

Λύση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι ο αριθμός $f'(\xi)$.

Για να είναι παράλληλη προς το xx' , αρκεί να ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$.

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική.
- $f(0) = \delta$, $f(1) = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma + \delta = \delta$ άρα $f(0) = f(1) = \delta$.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle, έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση 6.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + e^x = 3x + 10$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Λύση

Η εξίσωση $x^4 + e^x = 3x + 10 \Leftrightarrow x^4 + e^x - 3x - 10 = 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^4 + e^x - 3x - 10$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής. Από το Θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και ομοίως η εξίσωση $f''(x) = 0$ μία τουλάχιστον ρίζα.

Έχουμε όμως $f'(x) = 4x^3 + e^x - 3$ και $f''(x) = 12x^2 + e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα άτοπο. Επομένως η εξίσωση έχει το πολύ δύο ρίζες.

Άσκηση 7.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, έτσι ώστε να ισχύει $f^2(x) + f(x) - 6x = 3\ln x + 2011$ (1) για $x > 1$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα xx' το πολύ σε ένα σημείο.

Λύση

Έστω ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' σε δύο σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, έτσι έχουμε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, x_2] \subset (0, +\infty)$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα και συνεχής.
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Άρα ισχύει το Θ. Rolle, έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση (1), έτσι έχουμε $(f^2(x) + f(x) - 6x)' = (3\ln x + 2011)' \Rightarrow$

$$2f(x)f'(x) + f'(x) - 6 = \frac{3}{x} \quad (2).$$

Η (2) για $x = \xi$ γίνεται $2f(\xi)f'(\xi) + f'(\xi) - 6 = \frac{3}{\xi}$ και επειδή $f'(\xi) = 0$, θα έχουμε $-6 = \frac{3}{\xi}$.

Το οποίο είναι αδύνατο (άτοπο) γιατί $\xi > 0$, άρα η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα xx' σε δύο σημεία, οπότε θα τον τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

Άσκηση 8.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $3f^2(\alpha) + 5f^2(\beta) = 4[3f(\alpha) + 5f(\beta) - 8]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο M στη γραφική παράσταση της f , όπου η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Λύση

- Η σχέση $3f^2(\alpha) + 5f^2(\beta) = 4[3f(\alpha) + 5f(\beta) - 8]$ γίνεται
$$3f^2(\alpha) - 12f(\alpha) + 5f^2(\beta) - 20f(\beta) + 32 = 0 \Leftrightarrow$$
$$3(f^2(\alpha) - 4f(\alpha) + 4) + 5(f^2(\beta) - 4f(\beta) + 4) = 0 \Leftrightarrow 3(f(\alpha) - 2)^2 + 5(f(\beta) - 2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow f(\alpha) - 2 = 0 \text{ και } f(\beta) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta) = 2$$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- Παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) .
- $f(\alpha) = f(\beta) = 2$ οπότε, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$.
- Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$ και επειδή $f'(x_0) = 0$, θα είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha+1) = ef(\alpha)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \alpha+1)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = f(x_0)$.

Λύση

Στη σχέση $f'(x_0) = f(x_0)$ θέτουμε όπου x_0 το x και έτσι έχουμε $f'(x) = f(x)$. Δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = f(x)$.

Είναι:

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$. Επομένως είναι και συνεχής στο $[\alpha, \alpha+1]$.

$$\text{Επίσης } g(\alpha) = e^{-\alpha}f(\alpha) \text{ και } g(\alpha+1) = e^{-(\alpha+1)} \cdot f(\alpha+1) = e^{-(\alpha+1)} \cdot e \cdot f(\alpha) = e^{-\alpha}f(\alpha) = g(\alpha).$$

Άρα η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$ ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \alpha+1)$ έτσι ώστε $g'(x_0) = 0$, αλλά

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{-x}f(x))' = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) \Rightarrow g'(x_0) = e^{-x_0}f'(x_0) - e^{-x_0}f(x_0) = 0 \\ &\Rightarrow f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1)=1$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 3 - \frac{2}{x_0} f(x_0)$ (1).

Λύση

Στη σχέση (1), θέτουμε όπου x_0 το x και έτσι έχουμε $f'(x) = 3 - \frac{2}{x} f(x)$, $x \in (0,1)$. Δηλαδή το

x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 3 - \frac{2}{x} f(x)$, $x \in (0,1)$. Είναι:

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{x} f(x) \Leftrightarrow xf'(x) + 2f(x) - 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 f(x))' - (x^3)' = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$.

- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων (άρα και συνεχής στο $[0,1]$).

- $g(0) = 0$ και $g(1) = f(1) - 1 = 0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $g'(x_0) = 0$.

- $g(x) = x^2 f(x) - x^3 \Rightarrow g'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) - 3x^2 \Rightarrow g'(x_0) = x_0^2 f'(x_0) + 2x_0 f(x_0) - 3x_0^2 = 0$

ή $x_0(x_0 f'(x_0) + 2f(x_0) - 3x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) + 2f(x_0) - 3x_0 = 0$, ($x_0 \in (0,1) \Rightarrow x_0 \neq 0$)

$$x_0 f'(x_0) = 3x_0 - 2f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = 3 - \frac{2}{x_0} f(x_0)$$

Άσκηση 3.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[1, e]$, έτσι ώστε να ισχύει

$f(1) = \frac{f(e)}{e} + 1$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $B(0, x_0)$.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Για να διέρχεται η (ε) από το σημείο $B(0, x_0)$ αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} B \in (\varepsilon) &\Leftrightarrow x_0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) + x_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0) + x_0}{x_0^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} + \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0. \text{ Όπου } g(x) = \frac{f(x)}{x} + \ln x, \quad x \in [1, e]. \text{ Δηλαδή η} \\ &\text{εξίσωση } g'(x) = 0 \text{ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (1, e). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $g(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[1, e]$ διότι:

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ σαν άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων (άρα και συνεχής).
- $g(1) = \frac{f(1)}{1} + \ln 1 = f(1)$ και $g(e) = \frac{f(e)}{e} + \ln e = \frac{f(e)}{e} + 1 \stackrel{(1)}{=} f(1)$, άρα η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Άσκηση 4.

Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και ισχύει: $f(1) = f(2) - \frac{3}{2}$.

1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$, ώστε $f'(x_0) = x_0$.

2) Αν η f' είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και $f'(1) > 4$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$, ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.

Λύση

1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Αφού η f που είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ θα είναι και συνεχής, οπότε η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $g'(x) = f'(x) - x$. Επίσης

- $g(1) = f(1) - \frac{1}{2} = f(2) - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = f(2) - 2$ και
- $g(2) = f(2) - \frac{4}{2} = f(2) - 2$, οπότε ισχύει το Θ. Rolle.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$, ώστε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = x_0$.

2) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $x_0 \in (1, 2)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) - 4x$ στο $[1, x_0] \subseteq [1, 2]$, η οποία είναι συνεχής (f' είναι συνεχής στο $[1, 2]$). Επίσης

- $h(1) = f'(1) - 4 > 0$ και
- $h(x_0) = f'(x_0) - 4x_0 = x_0 - 4x_0 = -3x_0 < 0$, οπότε $h(1) \cdot h(x_0) < 0$.

Άρα ισχύει το Θ. Bolzano για την $h(x) = f'(x) - 4x$ στο $[1, x_0]$ που σημαίνει, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0) \subseteq (1, 2)$, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 4\xi$.

Άσκηση 5.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$,
- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$,
- $f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι:

- 1) $g(\alpha) \cdot g(\beta) \neq 0$.
- 2) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Λύση

1) Έστω $g(\alpha) \cdot g(\beta) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0$ ή $g(\beta) = 0$.

- Αν $g(\alpha) = 0$ η σχέση $f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x)$, για $x = \alpha$ μας δίνει:
 $f'(\alpha) \cdot g(\alpha) \neq f(\alpha) \cdot g'(\alpha) \Leftrightarrow 0 \neq 0$, που είναι άτοπο. Άρα $g(\alpha) \neq 0$.
- Αν $g(\beta) = 0$, όμοια καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $g(\beta) \neq 0$
Τελικά είναι $g(\alpha) \cdot g(\beta) \neq 0$.

2) Υποθέτουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Αφού, από το προηγούμενο ερώτημα, $g(\alpha) \cdot g(\beta) \neq 0$, τότε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής (πηλίκo συνεχών) στο $[\alpha, \beta]$.
- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη (πηλίκo παραγωγισίμων) στο (α, β) με
$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$
- $h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = 0$, $h(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = 0$. Οπότε $h(\alpha) = h(\beta)$.

Άρα ισχύει το Θ. Rolle για τη συνάρτηση h στο $[\alpha, \beta]$, που σημαίνει ότι υπάρχει ένα

τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot g(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0)$. **Άτοπο** γιατί $f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Το ότι καταλήξαμε σε άτοπο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι λάθος το $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Άρα η συνάρτηση g θα έχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0$.