

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

[Θεώρημα Rolle του κεφ.2.5 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να εξετάσετε από τις παρακάτω συναρτήσεις ποιές ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που δίνεται και στη συνέχεια για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία $f'(\xi) = 0$.

1. $f(x) = -x^3 + x - 1, x \in [0, 1]$

2. $g(x) = x^5 - 1, x \in [-1, 2]$

3. $h(x) = |x| - 1, x \in [-2, 2]$

4. $k(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [-1, 0) \\ x^3, & x \in [0, 1] \end{cases}$

Λύση

1. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως πολυωνυμική και ισχύει $f(0) = f(1) = -1$. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει

$$\xi \in (0, 1) \text{ έτσι ώστε } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -3\xi^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \xi = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ δεκτή μόνο η } \xi = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$$

2. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ ως πολυωνυμική. Όμως $g(-1) = -2 \neq 31 = g(2)$. Συνεπώς δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

3. Η h μπορεί να γραφεί ως $h(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \in [-2, 0] \\ x - 1, & x \in (0, 2] \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στους κλάδους ως πολυωνυμική και επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x - 1)$$

άρα είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $0 \in (-2, 2)$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1 + 1}{x} = 1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 1 + 1}{x} = -1,$$

συνεπώς δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

4. Η k παρατηρούμε ότι δεν είναι συνεχής στο $0 \in [-1, 1]$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3,$$

άρα δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μεθοδολογία

1. Διαπιστώνουμε αν η συνάρτηση f που μας δίνεται ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που μας έχει δοθεί.
2. Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$ και στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση $f'(\xi) = 0$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - \kappa x + \lambda, & -1 \leq x < 0 \\ \mu x^2 + 2x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τους πραγματικούς

αριθμούς κ , λ , μ αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.

Λύση

Αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle τότε:

- $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow \kappa + \lambda + 1 = \mu + 4 \Leftrightarrow \kappa + \lambda - \mu = 3 \quad (1)$
- Συνεχής στο $[-1,1]$. Αρχικά $f(0) = 2$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - \kappa x + \lambda) = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\mu x^2 + 2x + 2) = 2$ άρα $\lambda = 2 \quad (2)$
- Παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\mu x^2 + 2x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\mu x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\mu x + 2) = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - \kappa x + \lambda - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x - \kappa)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - \kappa) = -\kappa \text{ λόγω της (2).}$$

$$\text{Άρα } \kappa = -2 \quad (3).$$

- Από τις (1), (2), (3) βρίσκουμε ότι και $\mu = -3$.

Μεθοδολογία

Στο διάστημα που μας δίνουν δημιουργούμε τόσες εξισώσεις όσες είναι οι άγνωστες παράμετροι από:

- $f(\alpha) = f(\beta)$
- Συνέχεια (και στο σημείο που αλλάζει μορφή η f).
- Παραγωγισιμότητα (και στο σημείο που αλλάζει μορφή η f).

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

- Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, \pi]$.
- Η εξίσωση $\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f έχει για πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$.

Επειδή η x καθώς και η $\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, άρα και η f θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση αφού προκύπτει ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Συνεπώς θα είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(0, \pi)$.

Επίσης $f(0) = 0 = f(\pi)$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, \pi]$ και επομένως θα υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi + \xi\sigma\upsilon\nu\xi = 0$ δηλαδή η εξίσωση $\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

$(f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)$.

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε μία συνάρτηση f και μία εξίσωση και μας ζητούν να δείξουμε την ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας της εξίσωσης, τότε εξετάζουμε αν η συνάρτηση της εξίσωσης είναι παράγωγος της συνάρτησης f .

Παράδειγμα 4.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x = 2 - x$, $x > 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Λύση

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος δηλαδή $2\ln x - 2 + x = 0$.

Θεωρούμε ως $f(x)$ το πρώτο μέλος της εξίσωσης οπότε έχουμε $f(x) = 2\ln x - 2 + x$ με πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$.

Έστω τώρα ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 > 0$ με $\rho_1 \neq \rho_2$, οπότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Επίσης η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα θα είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) .

Συνεπώς ισχύει για την f το θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $f'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μεθοδολογία

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Βρίσκουμε σε ποιο σημείο μηδενίζεται (ρίζα).
- Δεχόμαστε ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα και με το θεώρημα Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 5.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$. Αν ισχύει να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ ως πολυωνυμική.
- $f(1) = 2$ και $f(-1) = 2$, άρα $f(1) = f(-1)$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 1)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$. Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ (απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο } (-1, 1) \text{)}, \text{ ή}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} \in (-1, 1) \text{ (δεκτή), άρα } x_0 = \frac{1}{3}.$$

Μεθοδολογία

Υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) .
- $f(\alpha) = f(\beta)$.

Συμπέρασμα του Θεωρήματος του Rolle:

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Παράδειγμα 6.

Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[0, 4]$ για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x - 3\sqrt{x} + 2, & x \in [0, 1] \\ 3x - 7\sqrt{x} + 4, & x \in (1, 4] \end{cases}$$

Αν ισχύει να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 0$.

Λύση

- Για κάθε $x \neq 1$ η f είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι συνεχής στο $[0, 4]$ αρκεί να είναι συνεχής στο 1.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 3\sqrt{x} + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 7\sqrt{x} + 4) = 0 = f(1)$$

Άρα η f συνεχής στο 1. Επομένως η f συνεχής στο $[0, 4]$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, 4)$ σαν άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

$$\circ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 3\sqrt{x} + 2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1) - 3(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - 3 \frac{(\sqrt{x}-1)}{x-1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)} \right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x - 7\sqrt{x} + 4 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1) - 7(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 - 7 \frac{(\sqrt{x}-1)}{x-1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 - \frac{7(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 - \frac{7}{(\sqrt{x}+1)} \right) = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, έτσι έχουμε:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}, & x \in (0,1) \\ -\frac{1}{2}, & x = 1 \\ 3 - \frac{7}{2\sqrt{x}}, & x \in (1,4) \end{cases} \quad \text{ή} \quad f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ 3 - \frac{7}{2\sqrt{x}}, & x \in (1,4) \end{cases}$$

- $f(0) = 2$ και $f(4) = 2$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
- Αν $x_0 \in (0,1)$ τότε $f'(x_0) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x_0}} = 0$ ή $x_0 = \frac{9}{4} \notin (0,1)$ απορρίπτεται.
- Αν $x_0 = 1$ τότε $f'(1) = -\frac{1}{2} \neq 0$.
- Αν $x_0 \in (1,4)$ τότε $f'(x_0) = 3 - \frac{7}{2\sqrt{x_0}} = 0$ ή $x_0 = \frac{49}{36} \in (1,4)$ δεκτή.

Μεθοδολογία

Αν η συνάρτηση f δίνεται με πολλαπλό τύπο, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1^ο Βήμα: Εξετάζουμε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στα επί μέρους διαστήματα.

2^ο Βήμα: Εξετάζουμε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στα σημεία που αλλάζει τύπο η συνάρτηση.

3^ο Βήμα: Εξετάζουμε αν $f(\alpha) = f(\beta)$.

Παράδειγμα 7.

Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-2, 4]$ για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \in [-2, 0] \\ -x + 4, & x \in (0, 4] \end{cases}$$

Λύση

- Αν $x \in [-2, 0) \cup (0, 4]$, η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Αν $x = 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 4) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 4) = 4$ και $f(0) = 4$, άρα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο 0 .

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-2, 4]$.

- Ισχύει $f(-2) = -(-2)^2 + 4 = 0$, $f(4) = -4 + 4 = 0$.
- Αν $x \in (-2, 0) \cup (0, 4)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.
- Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x^2 + 4) - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-x + 4) - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1$$

Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Μεθοδολογία

Αν η συνάρτηση f δίνεται με πολλαπλό τύπο, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1^ο Βήμα: Εξετάζουμε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στα επί μέρους διαστήματα.

2^ο Βήμα: Εξετάζουμε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στα σημεία που αλλάζει τύπο η συνάρτηση.

3^ο Βήμα: Εξετάζουμε αν $f(\alpha) = f(\beta)$.

Παράδειγμα 8.

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ ώστε για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \in [-2, 0) \\ \gamma x^2 - 5x + 2, & x \in [0, 2] \end{cases} \quad \text{να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα } [-2, 2]$$

και στη συνέχεια να βρείτε τουλάχιστον μια οριζόντια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Λύση

- Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[-2, 0)$ και $(0, 2]$ ως πολυωνυμική, άρα για να ισχύει το θεώρημα του Rolle, πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να ισχύει $f(-2) = f(2)$.

- Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \alpha x + \beta) = f(0)$, άρα $\beta = 2$ (1).

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma x^2 - 5x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 2}{x}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\gamma x - 5)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x + \alpha)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma x - 5) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + \alpha), \text{ άρα } \alpha = -5 \text{ (2).}$$

- Επίσης πρέπει να ισχύει

$$f(-2) = f(2) \Leftrightarrow 4 - 2\alpha + \beta = 4\gamma - 10 + 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 4 - 2(-5) + 2 = 4\gamma - 10 + 2 \Leftrightarrow \gamma = 6.$$

- Η παράγωγος της $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2, & x \in [-2, 0) \\ 6x^2 - 5x + 2, & x \in [0, 2] \end{cases}$ είναι η $f'(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \in [-2, 0) \\ 12x - 5, & x \in [0, 2] \end{cases}$.

- Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(-2, 2)$.

$$\text{Αν } x \in (-2, 0) \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2} \notin (-2, 0) \text{ (απορρίπτεται).}$$

$$\text{Αν } x \in [0, 2) \Rightarrow f'(x) = 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{12} \in [0, 2) \text{ (δεκτή)}$$

- Έτσι έχουμε $f'\left(\frac{5}{12}\right) = 0$, άρα στο σημείο $M\left(\frac{5}{12}, \frac{23}{24}\right)$ έχουμε μια οριζόντια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Μεθοδολογία

Γεωμετρικά το Θεώρημα του Rolle σημαίνει, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx' .

Παράδειγμα 9.

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{3} + \gamma = 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

1^ο Βήμα: Εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ στο διάστημα $[0,1]$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο διάστημα $[0,1]$.
- $f(0) = \gamma$ και $f(1) = \alpha + \beta + \gamma$, παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το πρόσημο των αριθμών $f(0)$, $f(1)$, άρα δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Bolzano.

2^ο Βήμα: Βρίσκουμε μία αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$, δηλαδή μία παραγωγίσιμη συνάρτηση F , έτσι ώστε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση $F(x) = \frac{\alpha}{5}x^5 + \frac{\beta}{3}x^3 + \gamma x$.

Η $F(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική:

- Η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική.
- $F(0) = 0$ και $F(1) = \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{3} + \gamma = 0 \Rightarrow F(0) = F(1) = 0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $F'(x_0) = 0$. Και επειδή $F'(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1^ο Βήμα: Τα μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος και θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$. Αν η εξίσωση έχει παρανομαστές κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών ώστε να ορίζεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

2^ο Βήμα: Για την εύρεση της ρίζας εφαρμόζουμε τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} Τρόπος: Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Bolzano.

2^{ος} Τρόπος: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών, δηλαδή αν $f(A)$ είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A και $0 \in f(A)$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο A από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

3^{ος} Τρόπος: Θεωρούμε μια παράγουσα της $f(x)$ (δηλαδή $F'(x) = f(x)$) και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle.

4^{ος} Τρόπος: Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα.

Παράδειγμα 10.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 3(2\alpha - 1)x^2 + 2(\alpha + \beta - 2)x - 3\alpha - \beta + 2 = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^4 + (2\alpha - 1)x^3 + (\alpha + \beta - 2)x^2 - (3\alpha + \beta - 2)x$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$.

- Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$, άρα συνεχής και στο διάστημα $[0,1]$.
- Η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$, άρα παραγωγίσιμη και στο διάστημα $(0,1)$.
- $f(0) = 0$
 $f(1) = 1^4 + (2\alpha - 1) \cdot 1^3 + (\alpha + \beta - 2) \cdot 1^2 - (3\alpha + \beta - 2) = 1 + 2\alpha - 1 + \alpha + \beta - 2 - 3\alpha - \beta + 2 = 0$

Και επειδή $f(0) = f(1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 + 3(2\alpha - 1)x^2 + 2(\alpha + \beta - 2)x - 3\alpha - \beta + 2.$$

Άρα η εξίσωση $4x^3 + 3(2\alpha - 1)x^2 + 2(\alpha + \beta - 2)x - 3\alpha - \beta + 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε ένα διάστημα Δ και δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Bolzano, τότε βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση F της f , ($F'(x) = f(x)$), και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την $F(x)$ στο Δ .

Παράδειγμα 11.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν ισχύει το Θεώρημα του Rolle

στο διάστημα $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ και να δείξετε ότι η εξίσωση $x + \varepsilon \phi \frac{1}{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

στο διάστημα $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$.

Λύση

- Αν $x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ τότε $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, άρα η f είναι συνεχής σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Αν $x_0 = 0$, τότε $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (\pm |x|) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ σαν γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - x \eta \mu \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right)' = \sin \frac{1}{x} - x \eta \mu \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \eta \mu \frac{1}{x}$$
- $f(0) = 0$ και $f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} \sin \left(-\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\right) = \frac{2}{\pi} \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
- Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, οπότε έχουμε

$$\sin \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} \eta \mu \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 \sin \frac{1}{x_0} + \eta \mu \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 + \frac{\eta \mu \frac{1}{x_0}}{\sin \frac{1}{x_0}} = 0 \Leftrightarrow x_0 + \varepsilon \phi \frac{1}{x_0} = 0$$

($\text{συν} \frac{1}{x_0} \neq 0$, γιατί αν $\text{συν} \frac{1}{x_0} = 0$ τότε $\eta\mu \frac{1}{x_0} = 0$, που είναι άτοπο).

Μεθοδολογία

Αν ζητείται η ρίζα μιας εξίσωσης της μορφής $g(x) = 0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ , εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για μια αρχική της $g(x)$, ($g'(x) = f(x)$), η οποία μας δίνεται .

Παράδειγμα 12.

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$ με $f(1) = 0$ και $g(x) = f(x)(x^2 - 4)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) = 0$.

Λύση

- Η εξίσωση $g(x) = 0$ με $g(x) = f(x)(x^2 - 4)$, έχει ρίζες τους αριθμούς $1, 2, -2$ γιατί $g(1) = f(1)(1 - 4) = 0$, $g(2) = f(2)(4 - 4) = 0$ και $g(-2) = f(-2)(4 - 4) = 0$.

Επίσης η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $g(x)$ στα διαστήματα $[-2, 1]$ και $[1, 2]$, θα έχουμε δύο αριθμούς $x_1 \in (-2, 1)$, $x_2 \in (1, 2)$ έτσι ώστε $g'(x_1) = 0$ και $g'(x_2) = 0$.
- Επίσης η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων.
- Εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $g'(x)$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) = 0$.

Μεθοδολογία

Αν έχουμε εξίσωση της μορφής $g''(x) = 0$, εφαρμόζουμε δύο φορές το Θεώρημα του Rolle για τις συναρτήσεις $g(x)$, $g'(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x} - 2x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα yy' .

Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = e^{\frac{x}{2}} + x - e^{-x} + 2x^3$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 2$ και $g(0) = 2$ δηλαδή $f(0) = g(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) - g(0) = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$ που σημαίνει ότι η h έχει ρίζα το 0. Άρα ένα κοινό σημείο των C_f , C_g είναι το σημείο $A(0, 2)$.

Τη μοναδικότητα της ρίζας της $h(x)$ θα την αποδείξουμε ως εξής: έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα ρ_1 με $h(\rho_1) = h(0) = 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \rho_1]$ ή $[\rho_1, 0]$ όπως προαναφέραμε, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\xi \in (0, \rho_1)$ ή $\xi \in (\rho_1, 0)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$.

Όμως $h'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + 1 + e^{-x} + 6x^2$, δηλαδή $h'(\xi) = \frac{1}{2}e^{\frac{\xi}{2}} + 1 + e^{-\xi} + 6\xi^2$ και επειδή

$h'(\xi) = \frac{1}{2}e^{\frac{\xi}{2}} + 1 + e^{-\xi} + 6\xi^2 > 0$ ως άθροισμα θετικών όρων, οδηγούμαστε σε άτοπο $h'(\xi) \neq 0$.

Συνεπώς το κοινό σημείο $A(0, 2)$ είναι μοναδικό.

Μεθοδολογία

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Βρίσκουμε σε ποιο σημείο μηδενίζεται η $h(x)$.
- Δεχόμαστε ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα και με το θεώρημα Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έτσι ώστε $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + f(0)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = \sin x_0$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - \eta\mu x$ η οποία είναι αρχική ή παράγουσα της $f'(x) - \sin x$

- Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)
- $h(0) = f(0)$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 + f(0) - 1 = f(0) \Rightarrow h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την h στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε $h'(x_0) = 0$ δηλαδή $f'(x_0) = \sin x_0$.

Μεθοδολογία

Αξιοποιούμε τις συνθήκες που μας δίνουν προκειμένου να βρούμε μία συνάρτηση στην οποία θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle.

Παράδειγμα 3.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x - 5 = (x^2 - 5x + 6)\epsilon\phi x$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 3)$.

Λύση

Έχουμε $2x - 5 = (x^2 - 5x + 6)\epsilon\phi x \Leftrightarrow (2x - 5)\sigma\upsilon\nu x = (x^2 - 5x + 6)\eta\mu x$ ή
 $(x^2 - 5x + 6)'\sigma\upsilon\nu x + (x^2 - 5x + 6)(\sigma\upsilon\nu x)' = 0 \Leftrightarrow [(x^2 - 5x + 6)\sigma\upsilon\nu x]' = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\sigma\upsilon\nu x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμη συναρτήσεων.

Επίσης ισχύει $f(2) = f(3) = 0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3)$ με $f'(\xi) = 0$ οπότε η εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)\sigma\upsilon\nu x = (x^2 - 5x + 6)\eta\mu x \Leftrightarrow 2x - 5 = (x^2 - 5x + 6)\epsilon\phi x$$

θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 3)$ (η λύση είναι δεκτή γιατί $\xi \in (2, 3)$ και $\xi \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$)

Μεθοδολογία

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο πρώτο μέλος.
- Θεωρούμε το πρώτο μέλος ως συνάρτηση f .
- Αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο $[\alpha, \beta]$.
- Αν δεν ισχύει η προηγούμενη περίπτωση, τότε βρίσκουμε μία αρχική συνάρτηση F της f και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

Παράδειγμα 4.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = x^2$ έχει μόνο δύο ρίζες στο $[-\pi, \pi]$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - x^2$ με $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-\pi, \pi]$.

Παρατηρούμε ότι $f(-\pi) = -1 - \pi^2 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -1 - \pi^2 < 0$. Αρχικά παρατηρούμε ότι το π και το $-\pi$ δεν είναι ρίζες της συνάρτησης f , οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$ στα οποία η f είναι συνεχής έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (-\pi, 0)$ και $\xi_2 \in (0, \pi)$ ώστε $f(\xi_1) = 0$ και $f(\xi_2) = 0$, δηλαδή η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικές.

Έστω ότι υπάρχει και τρίτη ρίζα ξ_3 , τότε θα ισχύει $f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(\xi_3) = 0$.

Υποθέτουμε ότι $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. (χωρίς βλάβη της γενικότητας)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ και $[\xi_2, \xi_3]$ διότι οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν για την f και

$$f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 2x = x\sigma\upsilon\nu x - 2x = x(\sigma\upsilon\nu x - 2).$$

Άρα θα υπάρχουν $\rho_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $\rho_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ έτσι ώστε $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$, αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η εξίσωση $f'(x) = x(\sigma\upsilon\nu x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x = 2$ (αδύνατη) έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Μεθοδολογία

- Αποδεικνύουμε με θεώρημα Bolzano ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.
- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα των δύο ριζών και αποδεικνύουμε με την «εις άτοπο απαγωγή» ότι δεν έχει άλλη ρίζα.

Παράδειγμα 5.

Έστω συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με $f(2) = [f(1)]^2$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε να ισχύει

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln(f(\xi))}{\xi}.$$

Λύση

$$\text{Είναι } f(2) = [f(1)]^2 \Leftrightarrow \ln[f(2)] = \ln[f(1)]^2 \Leftrightarrow \ln[f(2)] = 2\ln[f(1)] \Leftrightarrow \frac{\ln[f(2)]}{2} = \frac{\ln[f(1)]}{1}. \quad (1)$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = \frac{\ln[f(x)]}{x}.$$

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ (Η $\ln[f(x)]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση των $f(x)$ και $\ln x$).
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, με

$$g'(x) = \left[\frac{\ln[f(x)]}{x} \right]' = \frac{[\ln[f(x)]]' \cdot x - \ln[f(x)]}{x^2} = \frac{\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x - \ln[f(x)]}{x^2}. \quad (2)$$

- $g(1) = g(2)$ από την (1).

Άρα ισχύει το Θ. Rolle για την g , οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ ώστε να ισχύει

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \cdot \xi - \ln[f(\xi)]}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \cdot \xi - \ln[f(\xi)] = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln(f(\xi))}{\xi}$$

Μεθοδολογία

Αξιοποιούμε τις συνθήκες που μας δίνουν προκειμένου να βρούμε μία συνάρτηση στην οποία θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle.

Παράδειγμα 6.

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, έτσι ώστε να διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,-3)$, $B(3,3)$ και η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + \alpha x^2 + \beta x + 2.$$

- i. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει για την συνάρτηση $g(x)$ το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[0,1]$, $[1,3]$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,3)$, έτσι ώστε $f''(\xi) = 4$.

Λύση

i. Η συνάρτηση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,-3)$, $B(3,3)$, έτσι θα έχουμε $f(0) = 0$, $f(1) = -3$, $f(3) = 3$.

Επειδή για την συνάρτηση $g(x) = f(x) + \alpha x^2 + \beta x + 2$ ισχύει το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[0,1]$, $[1,3]$, θα έχουμε $g(0) = g(1)$ και $g(1) = g(3) \Rightarrow$

$$f(0) + 2 = f(1) + \alpha + \beta + 2 = f(3) + 9\alpha + 3\beta + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 9\alpha + 3\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 3\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

ii. Η συνάρτηση g γίνεται $g(x) = f(x) - 2x^2 + 5x + 2$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση $g(x)$ στα διαστήματα $[0,1]$, $[1,3]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε να ισχύει $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση $g'(x) = f'(x) - 4x + 5$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$:

- Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο διάστημα $[x_1, x_2]$ (η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη).
- $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,3)$, έτσι ώστε $g''(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi) - 4 = 0 \Rightarrow f''(\xi) = 4$.

Μεθοδολογία

Όταν ζητείται η απόδειξη μιας σχέσεως που έχει δεύτερη παράγωγο, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle σε κατάλληλη συνάρτηση που έχει την πρώτη παράγωγο.

Παράδειγμα 7.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \pi) \sin x$. Να δείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
- ii. Η εξίσωση $\sin x = x - \pi$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Λύση

i.

- Η συνάρτηση $f(x) = (x - \pi) \sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, άρα θα είναι και συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
- Η συνάρτηση $f(x) = (x - \pi) \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα θα είναι και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \sin \frac{\pi}{2} = 0$ και $f(\pi) = (\pi - \pi) \sin \pi = 0$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

ii. Αφού η συνάρτηση $f(x) = (x - \pi) \sin x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$.

$$\text{Έχουμε } f'(x) = (x - \pi)' \sin x + (x - \pi)(\sin x)' = \sin x - (x - \pi) \cos x$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sin x_0 - (x_0 - \pi) \cos x_0 = 0 \Leftrightarrow \sin x_0 = (x_0 - \pi) \cos x_0 \Leftrightarrow \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = (x_0 - \pi) \frac{\cos x_0}{\cos x_0}$$

$$\Leftrightarrow \sin x_0 = (x_0 - \pi) \cos x_0, (\cos x_0 \neq 0, x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)).$$

Άρα η εξίσωση $\sin x = x - \pi$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Μεθοδολογία

Αν ζητείται η ρίζα μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = 0$, να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα Δ , εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για μια αρχική της $f(x)$, ($F'(x) = f(x)$), η οποία και μας δίνεται.

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$f(1) - f(e) = \frac{1}{e} \quad (1). \text{ Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0 \in (1, e) \text{ έτσι ώστε}$$
$$x_0^2 f'(x_0) + 1 - \ln x_0 = 0 \quad (2).$$

Λύση

1^ο Βήμα: Στην σχέση (2) βάζουμε όπου x_0 το x και έχουμε

$$x^2 f'(x) + 1 - \ln x = 0 \stackrel{x^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) + \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) + \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = 0$$

Από τη σχέση (2) και με βάση την πιο πάνω ισοδυναμία παρατηρούμε ότι το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) + \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = 0$.

2^ο Βήμα: Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) + \frac{\ln x}{x}$ με πεδίο ορισμού το $D_g = (0, +\infty)$.

3^ο Βήμα: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[1, e]$:

- Η $g(x) = f(x) + \frac{\ln x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$, άρα και συνεχής.
- $g(1) = f(1) + \frac{\ln 1}{1} = f(1)$ και $g(e) = f(e) + \frac{\ln e}{e} = f(e) + \frac{1}{e} \stackrel{(1)}{=} f(1)$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ έτσι ώστε $g'(x_0) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) + \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = f'(x) + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) + \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 0 \Rightarrow x_0^2 f'(x_0) + 1 - \ln x_0 = 0$$

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε να ισχύει μια σχέση, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1° Βήμα: Στη σχέση βάζουμε όπου $x_0 \rightarrow x$ και τα φέρνουμε όλα στο πρώτο μέλος έτσι έχουμε την εξίσωση $g(x) = 0$.

2° Βήμα: Βρίσκουμε μια αρχική $G(x)$ της συνάρτησης g (αν δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Bolzano).

3° Βήμα: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την $G(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $f(0) = e^2 f(1)$ (1).

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$ (2).

Λύση

1^ο Βήμα: Στη σχέση (2) βάζουμε όπου $\xi \rightarrow x$ και τα φέρνουμε όλα στο πρώτο μέλος, έτσι έχουμε $f'(x) + 2f(x) = 0 \xrightarrow{\text{πολ./με } e^{2x}} e^{2x}f'(x) + 2e^{2x}f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{2x}f(x))' = 0$.

2^ο Βήμα: Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^{2x}f(x)$ με πεδίο ορισμού το $D_g = \mathbb{R}$.

3^ο Βήμα: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την $g(x)$ στο διάστημα $[0,1]$:

- Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα και συνεχής.
- $g(0) = e^0 f(0) = f(0)$ και $g(1) = e^2 f(1) \stackrel{(1)}{=} f(0)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε $g'(\xi) = 0$.

Αλλά $g'(x) = e^{2x}f'(x) + 2e^{2x}f(x)$

$g'(\xi) = 0 \Rightarrow e^{2\xi}f'(\xi) + 2e^{2\xi}f(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

Μεθοδολογία

Το Θεώρημα του Rolle, του Bolzano και των ενδιάμεσων τιμών λύνουν πολλά θεωρητικά προβλήματα σε θέματα ύπαρξης αριθμού x_0 έτσι ώστε να ισχύει μια σχέση. Σ' αυτή την περίπτωση αρκεί να βρούμε την κατάλληλη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα. Καταρχήν, αν στα ζητούμενα υπάρχει παράγωγος τον πρώτο λόγο έχει το Θεώρημα Rolle. Τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι:

1^ο Βήμα: Πρώτα στη θέση του ζητούμενου x_0 βάζουμε x και τα φέρνουμε όλα στο πρώτο μέλος.

2^ο Βήμα: Αν $f(x)$ είναι η συνάρτηση του πρώτου μέλους θεωρούμε την παράγουσα της $F(x)$, τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$, και εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την $F(x)$ σε κατάλληλο διάστημα.

Ειδικά στις σχέσεις τις μορφής $f'(x) + g(x)f(x)$ πολλαπλασιάζουμε με $e^{G(x)}$, όπου

$G'(x) = g(x)$, έτσι θα έχουμε $e^{G(x)}f'(x) + e^{G(x)}g(x)f(x) = (e^{G(x)}f(x))'$.