

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

[Κεφ. 2.6: Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής πλην της Ενότητας
Μονοτονία Συνάρτησης του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \frac{1}{3}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$g(x) = e^{-3x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση

Παραγωγίζοντας την g , έχουμε:

$$g'(x) = -3e^{-3x} \cdot f(x) + e^{-3x} \cdot f'(x), \quad (1)$$

όμως, έχει δοθεί:

$$f'(x) = 3f(x), \quad (2)$$

άρα από την (1), βάσει της (2), παίρνουμε:

$$g'(x) = -3e^{-3x} \cdot f(x) + 3e^{-3x} \cdot f(x) = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Έχουμε:

$$g(x) = c, \quad (3), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } c \text{ πραγματική σταθερά.}$$

Συνεπώς, βάσει της (3), έχουμε:

$$e^{-3x} \cdot f(x) = c, \text{ δηλαδή } f(x) = ce^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Για $x = 0$, από την (4), παίρνουμε: $c = \frac{1}{3}$,

άρα ο τύπος της f , λόγω της (4), είναι:

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ , αρκεί να δείξουμε ότι: $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Επίσης, αν θέλουμε να βρούμε και τον τύπο της συνάρτησης, αρκεί να δίνεται η τιμή της συνάρτησης για ένα οποιοδήποτε $x \in \Delta$.

Παράδειγμα 2.

Να βρείτε τον τύπο της $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$, με $f(1) = 5$

ii) $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$, με $f(0) = -3$

iii) $f''(x) = e^x - \sin x$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$, με $f'(0) = 1$ και $f(0) = 3$

Λύση

i) Έχουμε,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + c \quad (1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(1) = 5$, από την (1) για $x = 1$, παίρνουμε: $c = 5$.

Συνεπώς, ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f'(x) &= \frac{2x - x^2}{e^x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} \Leftrightarrow \\ f'(x) &= \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{e^x} + c \quad (2), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Επειδή $f(0) = -3$, από την (2) για $x = 0$, παίρνουμε: $c = -3$.

Συνεπώς, ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{iii) } f''(x) = e^x - \sin x \Leftrightarrow (f'(x))' = (e^x - \sin x)' \Leftrightarrow f'(x) = e^x - \sin x + c_1 \quad (3), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f'(0) = 1$, από την (3), για $x = 0$, παίρνουμε: $c_1 = 0$, οπότε από την (3) θα έχουμε:

$$f'(x) = e^x - \sin x \Leftrightarrow f'(x) = (e^x + \cos x)' \Leftrightarrow f(x) = e^x + \sin x + c_2 \quad (4), \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ομοίως, από την (4) επειδή $f(0) = 3$ και για $x = 0$, παίρνουμε: $c_2 = 1$.

Συνεπώς, ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = e^x + \sin x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο μιας συνάρτησης f , για την οποία ισχύει $f'(x) = g(x)$, για κάθε x που ανήκει σε διάστημα Δ , όπου $g(x)$ γνωστή συνάρτηση, τότε:

- βρίσκουμε συνάρτηση $G(x)$ τέτοια ώστε:

$$G'(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \text{ που ανήκει σε διάστημα } \Delta, \text{ οπότε:}$$

- θα έχουμε: $f'(x) = G'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$,

επομένως, $f(x) = G(x) + c$, $x \in \Delta$, c σταθερά.

Παράδειγμα 3.

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$x^2 \cdot f'(x) + 2xf(x) = x^2 \cdot f(x), \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = e.$$

Λύση

Η δοθείσα σχέση, ισοδυνάμως μετασχηματίζεται ως εξής:

$$x^2 \cdot f'(x) + 2xf(x) = x^2 \cdot f(x) \Leftrightarrow x^2 \cdot f'(x) + (x^2)' \cdot f(x) = x^2 \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x^2 \cdot f(x)]' = x^2 \cdot f(x) \quad (1), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Συνεπώς, βάσει της ισοδυναμίας: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, από την (1) έχουμε:

$$x^2 \cdot f(x) = ce^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{c \cdot e^x}{x^2}, \quad x > 0, \quad (2).$$

Επειδή $f(1) = e$, από την (2) για $x = 1$, παίρνουμε: $c = 1$.

Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Μεθοδολογία

Αν έχουμε ισότητα της μορφής,

$$H(x, f'(x), f(x)) = A(x)f(x), \quad A(x) \neq 0, \quad (1),$$

για κάθε x που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού Δ των συναρτήσεων της σχέσης (1), τότε:

- Με κατάλληλους μετασχηματισμούς η (1) παίρνει την μορφή,

$$(B(x)f(x))' = B(x)f(x) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)} \right)' = \frac{f(x)}{\Gamma(x)} \quad (2), \text{ για κάθε } x \in \Delta,$$

όπου $A(x), B(x), \Gamma(x)$ γνωστές συναρτήσεις, με $B(x) \neq 0, \Gamma(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

- Ισοδυνάμως, έχουμε ότι :

$$B(x)f(x) = ce^x, \quad \text{ή} \quad \frac{f(x)}{\Gamma(x)} = ce^x, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta, \quad c \text{ πραγματική σταθερά.}$$

- Στη συνέχεια, από συνθήκες που θα δίνονται για τις συναρτήσεις του προβλήματος, θα προσδιορίζεται η σταθερά c και κατά συνέπεια ο τύπος της f .

Παράδειγμα 4.

Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$ και $f'(x) = 3x^2 - 2x + \sin x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = 3$ και $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x-1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- iii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $f'(x) = \sin x - x \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iv. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) = e^x (\eta\mu 2x + 2\sigma\upsilon\nu 2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- v. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ και $f'(x) = \frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Λύση

- i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + \sin x - 2 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + (\sin x)' - 2(x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (x^3 - x^2 + \sin x - 2x)'.$$

$$\text{Άρα υπάρχει σταθερά } c \text{ ώστε: } f(x) = x^3 - x^2 + \sin x - 2x + c \quad (1)$$

Επειδή $f(0) = 2$, για $x = 0$ από την (1) βρίσκουμε: $f(0) = c \Leftrightarrow c = 2$. Άρα:

$$f(x) = x^3 - x^2 + \sin x - 2x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- ii. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x-1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = (\sqrt{x})' + (\ln x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} + \ln x + \frac{1}{x} \right)'.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε: $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \frac{1}{x} + c$ (2)

Επειδή $f(1) = 3$, για $x = 1$ από την (2) βρίσκουμε:

$$f(1) = 1 + 0 + \frac{1}{1} + c \Leftrightarrow 3 = 2 + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα: $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \frac{1}{x} + 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \sin x - x \cos x \Leftrightarrow f'(x) = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' \Leftrightarrow f'(x) = (x \cdot \sin x)'.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε: $f(x) = x \cdot \sin x + c$ (3)

Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, για $x = \frac{\pi}{2}$ από την (3) βρίσκουμε: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 + c \Leftrightarrow 0 = c$.

Άρα: $f(x) = x \cdot \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = e^x (\eta\mu 2x + 2\sigma\upsilon\nu 2x) \Leftrightarrow f'(x) = e^x \cdot \eta\mu 2x + e^x \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (e^x)' \cdot \eta\mu 2x + e^x \cdot (\eta\mu 2x)' \Leftrightarrow f'(x) = (e^x \cdot \eta\mu 2x)'.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε: $f(x) = e^x \cdot \eta\mu 2x + c$ (4)

Επειδή $f(0) = 0$, για $x = 0$ από την (4) βρίσκουμε: $f(0) = 1 \cdot 0 + c \Leftrightarrow 0 = c$.

Άρα: $f(x) = e^x \cdot \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v. Για κάθε $x \in (0, \pi)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x)' \cdot \eta\mu x - x \cdot (\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x}{\eta\mu x} \right)'.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε: $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x} + c$ (5)

Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, για $x = \frac{\pi}{2}$ από την (5) βρίσκουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + c \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + c \Leftrightarrow 0 = c. \text{ Άρα: } f(x) = \frac{x}{\eta\mu x} \text{ για κάθε } x \in (0, \pi).$$

Μεθοδολογία

Έστω μία συνάρτηση g ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν ζητείται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ώστε: $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ ενεργούμε ως εξής:

Βρίσκουμε μια συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο Δ ώστε: $h'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. (Υπάρχει τέτοια συνάρτηση εφόσον η g είναι συνεχής). Έτσι έχουμε: $f'(x) = h'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $f(x) = h(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αν επιπλέον δίνεται κάποια συνθήκη που ικανοποιεί η f , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά c και έτσι θα έχουμε υπολογίσει τη συνάρτηση f . Τέλος ελέγχουμε αν η συνάρτηση που προσδιορίσαμε είναι η ζητούμενη.

Παράδειγμα 5.

Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln 2, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{και τέτοια ώστε} \quad f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Λύση

$$\text{Για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ έχουμε: } f''(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow (f'(x))' = (\epsilon\phi x)'. \quad \text{}$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε:

$$f'(x) = \epsilon\phi x + c.$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{4}, \text{ έχουμε: } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα: } f'(x) = \epsilon\phi x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\eta\mu x}{\sin x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{\sin x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{(\sin x)'}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = [-\ln|\sin x|]' \Leftrightarrow f(x) = -\ln|\sin x| + c.$$

$$\text{Επειδή } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ είναι } \sin x > 0 \text{ οπότε: } f(x) = -\ln(\sin x) + c.$$

$$\text{Επειδή } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln 2, \text{ έχουμε:}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\ln\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) + c \Leftrightarrow \ln 2 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + c \Leftrightarrow \ln 2 = -(\ln 1 - \ln 2) + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα: } f(x) = -\ln(\sin x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Μεθοδολογία

Έστω μία συνάρτηση g ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν ζητείται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ώστε: $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ ενεργούμε ως εξής:

Βρίσκουμε μια συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο Δ ώστε: $h'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
(Υπάρχει τέτοια συνάρτηση εφόσον η g είναι συνεχής). Έτσι έχουμε: $f'(x) = h'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $f(x) = h(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αν επιπλέον δίνεται κάποια συνθήκη που ικανοποιεί η f , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά c και έτσι θα έχουμε υπολογίσει τη συνάρτηση f . Τέλος ελέγχουμε αν η συνάρτηση που προσδιορίσαμε είναι η ζητούμενη.

Παράδειγμα 6.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:
 $f(0) = 2$ και $[f'(x) - f(x)] \cdot (2 + \sin x) + f(x) \cdot \eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$[f'(x) - f(x)] \cdot (2 + \sin x) + f(x) \cdot \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot (2 + \sin x) - f(x) \cdot (2 + \sin x) + f(x) \cdot \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot (2 + \sin x) + f(x) \cdot \eta\mu x = f(x) \cdot (2 + \sin x) \Leftrightarrow$$

και επειδή $(2 + \sin x)^2 \neq 0$ αφού $-1 \leq \sin x \leq 1$ έχουμε

$$\frac{f'(x) \cdot (2 + \sin x) + f(x) \cdot \eta\mu x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{f(x) \cdot (2 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{2 + \sin x} \right)' = \frac{f(x)}{2 + \sin x}.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε: $\frac{f(x)}{2 + \sin x} = ce^x \Leftrightarrow f(x) = c(2 + \sin x)e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$, επειδή $f(0) = 2$, έχουμε: $f(0) = c \cdot 3 \cdot e^0 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}$.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι: $f(x) = \frac{2}{3}(2 + \sin x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Χρησιμοποιήσαμε τη βασική πρόταση:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , έχουμε:

Αν $f'(x) = f(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε $f(x) = c \cdot e^x$, $x \in \Delta$.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x-2) = 2x+3$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν $f(1) = 2$, να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Θέτουμε $x-2 = u \Leftrightarrow x = u+2$, $u \in \mathbb{R}$ οπότε η (1) γίνεται:

$$f'(u) = 2(u+2)+3, \text{ άρα } f'(u) = 2u+7 \text{ ή}$$

$$f'(x) = 2x+7, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε:

$$f'(x) = (x^2 + 7x)', \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή,

$$f(x) = x^2 + 7x + c \text{ (2)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(1) = 2$, από την (2) για $x=1$, έχουμε:

$$f(1) = 8 + c, \text{ δηλαδή } c = -6.$$

Συνεπώς, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^2 + 7x - 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Έστω μία συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα. Αν για την f έχουμε μια σχέση της μορφής $f'(g(x)) = h(x)$, (1), για κάθε $x \in D_{f'} \cap D_g = D_h$, όπου g, h γνωστές συναρτήσεις, και θέλουμε να προσδιορίσουμε τον τύπο της f ή να βρούμε την αριθμητική τιμή της f στη θέση $x = \alpha$, όπου $\alpha \in D_f$.

Τότε θέτουμε $g(x) = u$, $u \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

A) Αν η g είναι 1-1 και η $g(x) = u$ λύνεται ως προς x , τότε μετά τις αντικαταστάσεις καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής $f'(x) = t(x)$, από την οποία σχέση στη συνέχεια προσδιορίζουμε τον τύπο της f ή την αριθμητική τιμή της f στη θέση $x = \alpha$.

B) Αν η $g(x) = u$ δεν λύνεται ως προς x , τότε:

Κατασκευαστικά προσπαθούμε να φτάσουμε (αν είναι εφικτό) την (1) στη μορφή,
 $f'(g(x)) = v(g(x)) \Rightarrow f'(u) = v(u)$ από την οποία σχέση στη συνέχεια προσδιορίζουμε τον
τύπο της f ή την αριθμητική τιμή της f στη θέση $x = \alpha$.

Παράδειγμα 2.

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) = 3$ και $(x-2) \cdot f'(x) = x^2 - 5x + 6$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

Για κάθε $x \neq 2$, από την (1), έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2},$$

συνεπώς,

$$f'(x) = x - 3 \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right)'.$$

$$\text{Άρα: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 3x + c_1, & x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + c_2, & x > 2 \end{cases} \quad \text{όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Από $f(0) = 3$, έχουμε:

$$\frac{0^2}{2} - 3 \cdot 0 + c_1 = 3 \Rightarrow c_1 = 3$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 2$, συνεπώς έχουμε:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{δηλαδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + c_1 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + c_2 \right) \Rightarrow -4 + c_1 = -4 + c_2 \Rightarrow c_1 = c_2. \quad \text{Άρα } c_2 = 3.$$

Λόγω της συνέχειας της f , παίρνουμε:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 3 \right) = -1.$$

Άρα,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 3x + 3, & x < 2 \\ -1, & x = 2 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + 3, & x > 2 \end{cases}$$

Τελικά, ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Αν A_1, A_2 διαστήματα με $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A_1 \cup A_2$ θα έχουμε:

- Αν $x \in A_1$, τότε $f(x) = g(x) + c_1$,

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- Αν $x \in A_2$, τότε $f(x) = g(x) + c_2$,

Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τις σταθερές από ιδιότητες που ικανοποιεί η f .

Παράδειγμα 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x) + 2f(x) = 0$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) = 3$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση

Επειδή $2 = (2x)'$, η (1) γίνεται:

$$f'(x) + (2x)' f(x) = 0 \quad (2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με το e^{2x} παίρνουμε:

$$f'(x) \cdot e^{2x} + e^{2x} \cdot (2x)' f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{2x}]' = 0,$$

συνεπώς,

$$f(x) \cdot e^{2x} = c \quad (3), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 3$, για $x = 0$ από την (3), έχουμε: $c = 3$, (4).

Συνεπώς, από τη (3) λόγω της (4), ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = 3 \cdot e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε μια σχέση της μορφής: $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0$, τότε πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης με το $e^{G(x)}$, όπου $G(x)$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$G'(x) = g(x)$ και έτσι έχουμε:

$$f'(x) \cdot e^{G(x)} + G'(x) \cdot e^{G(x)} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{G(x)}]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot e^{G(x)} = c, \quad c \text{ πραγματική σταθερά.}$$

Συνεπώς, ο τύπος της συνάρτησης θα είναι:

$$f(x) = c e^{-G(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 4.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 5f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\alpha) = 4$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot f(2\alpha - x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρεθεί ο τύπος της.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(2\alpha - x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και συνεχής), ως γινόμενο παραγωγίσιμων, με παράγωγο:

$$g'(x) = f'(x) \cdot f(2\alpha - x) + f(x) \cdot f'(2\alpha - x) \cdot (2\alpha - x)' \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = f'(x) \cdot f(2\alpha - x) - f(x) \cdot f'(2\alpha - x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Αφού η σχέση $f'(x) = 5f(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f'(2\alpha - x) = 5f(2\alpha - x)$.

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην (1), βρίσκουμε:

$$g'(x) = 5f(x) \cdot f(2\alpha - x) - 5f(x) \cdot f(2\alpha - x) \Leftrightarrow g'(x) = 0.$$

Επομένως $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c σταθερός αριθμός.

Από τη σχέση $g(x) = f(x) \cdot f(2\alpha - x)$ για $x = \alpha$, έχουμε:

$$g(\alpha) = f(\alpha) \cdot f(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) = 4 \cdot 4 \Leftrightarrow g(\alpha) = 16. \text{ Άρα } g(x) = 16 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ (όχι ένωση διαστημάτων), αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ και ότι $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος Δ .

Τότε θα ισχύει: $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$, όπου c σταθερός αριθμός.

Για να βρούμε τη σταθερά c , αρκεί να βρούμε την τιμή της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$. Τότε θα ισχύει: $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Παράδειγμα 5.

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και τέτοια ώστε $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4 \cdot \eta\mu x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Λύση

Επειδή για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x \neq 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\frac{f(x)}{\eta\mu x} = 4$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$, άρα και

συνεχής στο διάστημα αυτό, με παράγωγο $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ (1)

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με: $h'(x) = [f''(x) \cdot \eta\mu x + f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x] - [f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - f(x) \cdot \eta\mu x] \Leftrightarrow$

$$h'(x) = [f''(x) + f(x)] \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow h'(x) = 0 \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow h'(x) = 0, \quad x \in (0, \pi).$$

Επομένως $h(x) = c$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, όπου c σταθερός αριθμός.

Επειδή $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = 0$, είναι:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot \eta\mu x - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, \pi).$$

Τότε από την (1) προκύπτει: $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Άρα $g(x) = c$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, όπου c είναι σταθερός αριθμός.

$$\text{Ισοδύναμα: } \frac{f(x)}{\eta\mu x} = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in (0, \pi).$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{6} \text{ έχουμε: } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = c \cdot \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2 = c \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 4.$$

Άρα: $f(x) = 4 \cdot \eta\mu x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει σε ένα διάστημα Δ τύπο της μορφής

$f(x) = \alpha \cdot g(x)$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ αν $g(x) \neq 0$ για κάθε

$x \in \Delta$ και να αποδείξουμε ότι είναι σταθερή στο Δ και ίση με α (ή τη συνάρτηση

$\varphi(x) = f(x) - \alpha \cdot g(x)$) και να αποδείξουμε ότι $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$).

Παράδειγμα 6.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν ισχύουν οι σχέσεις $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $f(x) \cdot f'(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(x) \cdot f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (x^2)'$.

Άρα υπάρχει σταθερά c , ώστε: $f^2(x) = x^2 + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f , ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, έχουμε:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Για $x = 1$ έχουμε: $f^2(1) = 1^2 + c \Leftrightarrow 2^2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 3$.

Επομένως: $f^2(x) = x^2 + 3 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x^2 + 3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (1)

Επειδή η f είναι συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως είναι $f(1) = 2 > 0$. Άρα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς από την (1) έχουμε: $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Έστω μία συνάρτηση g ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν ζητείται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ώστε: $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ ενεργούμε ως εξής:

Βρίσκουμε μια συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο Δ ώστε: $h'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

(Υπάρχει τέτοια συνάρτηση εφόσον η g είναι συνεχής). Έτσι έχουμε: $f'(x) = h'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $f(x) = h(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αν επιπλέον δίνεται κάποια συνθήκη που ικανοποιεί η f , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά c και έτσι θα έχουμε υπολογίσει τη συνάρτηση f . Τέλος ελέγχουμε αν η συνάρτηση που προσδιορίσαμε είναι η ζητούμενη.

Παράδειγμα 7.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f(-1)=3$, $f(1)=2$ και τέτοια ώστε: $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Λύση

Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow x \cdot f'(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow (x \cdot f(x))' = (x^2)'$$

Άρα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 ώστε:

$$x \cdot f(x) = \begin{cases} x^2 + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ x^2 + c_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x + \frac{c_1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \\ x + \frac{c_2}{x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Όμως } f(-1)=3 \Leftrightarrow -1 + \frac{c_1}{-1} = 3 \Leftrightarrow c_1 = -4 \text{ και } f(1)=2 \Leftrightarrow 1 + \frac{c_2}{1} = 2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

$$\text{Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι: } f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x}, & x \in (-\infty, 0) \\ x + \frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

Μεθοδολογία

Αν ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x ενός συνόλου της μορφής $A = \Delta_1 \cup \Delta_2$ και οι f, g είναι συνεχείς σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , τότε υπάρχουν σταθερές

$$c_1, c_2 \text{ ώστε: } f(x) = \begin{cases} g(x) + c_1, & x \in \Delta_1 \\ g(x) + c_2, & x \in \Delta_2 \end{cases}.$$

Παράδειγμα 8.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

ότι: $f'(x) = e^x(2+x) - \frac{f(x) - \sin x}{x}$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Λύση

Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε: $f'(x) = e^x(2+x) - \frac{f(x) - \sin x}{x} \Leftrightarrow$

$$xf'(x) + f(x) = 2xe^x + x^2e^x + \sin x \Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2e^x + \eta\mu x)'$$

Άρα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 ώστε:

$$x \cdot f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot e^x + \eta\mu x + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ x^2 \cdot e^x + \eta\mu x + c_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση $h(x) = xf(x)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \cdot e^x + \eta\mu x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot e^x + \eta\mu x + c_2) = h(0). \text{ Τότε: } c_1 = c_2 = h(0).$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xf(x)) = 0 \cdot f(0) = 0$. Επομένως $c_1 = c_2 = 0$, οπότε:

$$xf(x) = \begin{cases} x^2e^x + \eta\mu x, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ x^2e^x + \eta\mu x, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow xf(x) = x^2e^x + \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \neq 0$, έχουμε: $f(x) = xe^x + \frac{\eta\mu x}{x}$.

Για $x = 0$, επειδή η f ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(xe^x + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 1 + 1 = 1.$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι: $f(x) = \begin{cases} xe^x + \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Μεθοδολογία

Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο διάστημα (α, β) και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε

$x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 ώστε:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + c_1, & x \in (\alpha, x_0) \\ g(x) + c_2, & x \in (x_0, \beta) \end{cases}.$$

Αν επιπλέον οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow g(x_0) + c_1 = g(x_0) + c_2 = f(x_0) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = f(x_0).$$

Άρα: $f(x) = g(x) + f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Παράδειγμα 9.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = -4$ και για την οποία

$$\text{ισχύει: } f(x+y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{2} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Λύση

- i. Από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \frac{f^2(0)}{2} \Leftrightarrow 2f(0) - f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)[2 - f(0)] = 0.$$

Επειδή είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε: $2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 2$.

$$\text{Επομένως: } f'(0) = -4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = -4 \quad (2)$$

Έστω τώρα τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0) \cdot f(h)}{2} - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot f(h) - 2f(x_0)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0)}{2} \cdot \frac{f(h) - 2}{h} \right] =$$

$$\frac{f(x_0)}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2}{h} \stackrel{(2)}{=} \frac{f(x_0)}{2} \cdot (-4) = -2f(x_0).$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = -2f(x_0)$.

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = -2f(x) \Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{2x} \cdot f'(x) + 2e^{2x} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{2x}]' = 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) \cdot e^{2x} = c \Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{e^{2x}} \Leftrightarrow f(x) = ce^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$, επειδή $f(0) = 2$, έχουμε: $f(0) = ce^0 \Leftrightarrow 2 = c$.

Επομένως η συνάρτηση f έχει τύπο: $f(x) = 2e^{-2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μεθοδολογία

Στο (β) ερώτημα της άσκησης αυτής είχαμε μια παράσταση της μορφής $f'(x) + \lambda f(x) = h(x)$ όπου f είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και h συνεχής στο Δ .

Σε μια τέτοια περίπτωση πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη με $e^{\lambda x}$ οπότε:

$$f'(x) + \lambda f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\lambda x} \cdot f'(x) + \lambda e^{\lambda x} \cdot f(x) = e^{\lambda x} \cdot h(x) \Leftrightarrow (e^{\lambda x} \cdot f(x))' = e^{\lambda x} \cdot h(x)$$

Αν $\varphi(x)$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\varphi'(x) = e^{\lambda x} \cdot h(x)$, έχουμε:

$$(e^{\lambda x} \cdot f(x))' = (\varphi(x))' \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Παράδειγμα 10.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και $f'(x) \cdot f(\pi - x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot f(\pi - x)$ είναι σταθερή.
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Λύση

- i. Στη σχέση (1) που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε όπου x το $\pi - x$ και έχουμε:
 $f'(\pi - x) \cdot f(\pi - (\pi - x)) = \eta\mu(\pi - x) \Leftrightarrow f'(\pi - x) \cdot f(x) = \eta\mu x$ (2)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) \cdot f(\pi - x) - f'(\pi - x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot f(\pi - x)]' = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε: $g(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $g(x) = c \Leftrightarrow f(x) \cdot f(\pi - x) = c$.

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ από τη σχέση αυτή έχουμε: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = c \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Τότε: $f(x) \cdot f(\pi - x) = 1 \Leftrightarrow f(\pi - x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $f(x) \in \mathbb{R}^*$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = \eta\mu x \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) - \eta\mu x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + (\sigma\upsilon\nu x)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot f'(x) + e^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}]' = 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(x) \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} = c, x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ βρίσκουμε: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^0 = c \Leftrightarrow 1 = c.$$

$$\text{Συνεπώς: } f(x) \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{e^{\sigma\upsilon\nu x}}, x \in \mathbb{R}.$$

Μεθοδολογία

Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και f, g παραγωγίσιμες σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε όταν έχουμε παράσταση της μορφής

$f'(x) + g'(x)f(x) = h(x)$ πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη με $e^{g(x)}$ οπότε:

$$f'(x) + g'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{g(x)} \cdot f'(x) + e^{g(x)} \cdot g'(x)f(x) = e^{g(x)} \cdot h(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{g(x)} \cdot f(x) \right)' = e^{g(x)} \cdot h(x).$$

Αν $\varphi(x)$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\varphi'(x) = e^{g(x)} \cdot h(x)$, έχουμε:

$$\left(e^{g(x)} \cdot f(x) \right)' = \left(\varphi(x) \right)' \text{ κ.τ.λ.}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 1/9/2011