

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

[Ενότητες Η Έννοια του Τοπικού Ακροτάτου - Προσδιορισμός των τοπικών Ακροτάτων πλην του Θεωρήματος Εύρεση Τοπικών Ακροτάτων του Κεφ.2.7 του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - |x|$, $x \in [-1, 2]$. Να βρείτε:

- Τα κρίσιμα σημεία.
- Τις πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων.
- Το σύνολο τιμών της f .

Λύση

i. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, 2] \\ x^2 + x, & x \in [-1, 0) \end{cases}$

Κρίσιμα σημεία είναι:

α) Τα εσωτερικά σημεία του $(-1, 2)$ στα οποία η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$

- Για $x > 0$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 1$.
- Για $x < 0$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x + 1$.
- Για $x=0$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x} = -1$

$$\text{Και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x} = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και συνεπώς το 0 είναι κρίσιμο σημείο.

Για $x > 0$ η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα μας δώσει $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ που είναι δεκτή.

Για $x < 0$ η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα μας δώσει $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ που είναι δεκτή.

Άρα κρίσιμα σημεία είναι τα $:-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$.

ii. Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων είναι:

α) Τα κρίσιμα σημεία και

β) τα άκρα του διαστήματος $[-1, 2]$

Άρα πιθανές θέσεις ακρότατων είναι τα σημεία: $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2$

iii. Η f είναι συνεχής για $x \in (0, 2]$ και $x \in [-1, 0)$ ως παραγωγίσιμη. Και στο 0 θα εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = f(0) = 0.$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο 0, οπότε είναι συνεχής στο $[-1, 2]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$, το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A) = [m, M]$, όπου m είναι η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $[-1, 2]$

Άρα m και M αντίστοιχα η μικρότερη και η μεγαλύτερη από τις τιμές της f στις θέσεις τοπικών ακρότατων.

Έχουμε $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(2) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

Άρα $m = -\frac{1}{4}$ και $M = 2$ δηλαδή $f(A) = [-\frac{1}{4}, 2]$.

Μεθοδολογία

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή:

α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

Τα κρίσιμα σημεία μαζί με τα άκρα του Δ (αν αυτά ανήκουν) θα μας δώσουν τα πιθανά ακρότατα.

Σημείωση: Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της f θα είναι $[m, M]$. Όπου m και M η μικρότερη και μεγαλύτερη αντίστοιχα από τις τιμές της f στα σημεία που έχουμε πιθανά ακρότατα.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x(\ln x + \beta)$ με $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει ακρότατο στο σημείο $A(e^{-2}, -e^{-2})$, να βρείτε τα α και β .

Λύση

Η συνάρτηση f έχει για πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x) = (\alpha x)'(\ln x + \beta) + (\alpha x)(\ln x + \beta)' =$

$$\alpha(\ln x + \beta) + (\alpha x \cdot \frac{1}{x}) = \alpha(\ln x + \beta) + \alpha = \alpha(1 + \beta + \ln x) \quad (1)$$

Στο $x_0 = e^{-2}$ η f παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη, άρα λόγω θεωρήματος Fermat θα ισχύει $f'(e^{-2}) = 0$ (2)

Η σχέση (2) λόγω της (1) θα μας δώσει $\alpha(1 + \beta + \ln e^{-2}) = 0 \Leftrightarrow \alpha(1 + \beta - 2) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$ (3)
έχουμε ότι $f(e^{-2}) = -e^{-2}$ άρα $\alpha e^{-2}(\ln e^{-2} + \beta) = -e^{-2} \Leftrightarrow \alpha(-2 + \beta) = -1 \Leftrightarrow$ (λόγω της (3))
 $\alpha(-1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τις τιμές παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:

- μια συνάρτηση f να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία x_1 και x_2 και η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά, εφαρμόζουμε το θεώρημα Fermat και απαιτούμε

$$f'(x_1) = 0 \quad (1), \quad f'(x_2) = 0 \quad (2).$$

Από τη λύση του συστήματος των δυο εξισώσεων προσδιορίζουμε τα α, β .

Σημείωση:

Αν τώρα γνωρίζουμε μόνο ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ το οποίο είναι ακρότατο της f τότε απαιτούμε $f'(x_0) = 0$ (1) και $f(x_0) = y_0$ (2). Από την λύση του συστήματος των δυο εξισώσεων προσδιορίζουμε τις παραμέτρους α, β .

Παράδειγμα 3.

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x + \frac{2\alpha}{x+1} \geq \alpha x^2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{2}{5}$.

Λύση

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{2\alpha}{x+1} - \alpha x^2$, $x \in (0, +\infty)$.
- Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\ln x + \frac{2\alpha}{x+1} \geq \alpha x^2 \Leftrightarrow \ln x + \frac{2\alpha}{x+1} - \alpha x^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της.

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{2\alpha}{x+1} - \alpha x^2 \right)' = \frac{1}{x} - \frac{2\alpha}{(x+1)^2} - 2\alpha x,$$

οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ με:

$$f'(1) = 1 - \frac{\alpha}{2} - 2\alpha = 1 - \frac{5\alpha}{2}$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε $f'(1) = 0$.

$$\text{Είναι: } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{5}$$

Σημείωση: Στα επόμενα η φράση «ισχύει το Θεώρημα Fermat» χρησιμοποιείται με την έννοια ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat.

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση, η οποία ισχύει για κάθε $x \in \Delta$, όπου Δ διάστημα και ζητείται να αποδειχθεί μια ισότητα, τότε συνήθως ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
- Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο Δ με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.
- Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \geq f(x_0)$ ή $f(x) \leq f(x_0)$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ . Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει $f'(x_0) = 0$ από την οποία προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.

Παράδειγμα 4.

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x$, όπου $0 < \alpha \neq 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Λύση

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^\alpha - \alpha^x$, $x \in (0, +\infty)$.

- Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$x^\alpha \leq \alpha^x \Leftrightarrow x^\alpha - \alpha^x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(\alpha)$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = \alpha$ του πεδίου ορισμού της.

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = (x^\alpha - \alpha^x)' = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha^x \ln \alpha,$$

οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = \alpha$ με:

$$f'(\alpha) = \alpha^\alpha - \alpha^\alpha \ln \alpha = \alpha^\alpha (1 - \ln \alpha)$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε $f'(\alpha) = 0$.

Είναι:

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^\alpha (1 - \ln \alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση, η οποία ισχύει για κάθε $x \in \Delta$, όπου Δ διάστημα και ζητείται να αποδειχθεί μια ισότητα, τότε συνήθως ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.

- Για κάθε $x \in \Delta$, θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.

- Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \geq f(x_0)$ ή $f(x) \leq f(x_0)$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ .

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει $f'(x_0) = 0$ από την οποία προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.

Παράδειγμα 5.

Δίνεται συνάρτηση f με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e^{f(x)} \geq \alpha f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Λύση

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - \alpha f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:
$$e^{f(x)} \geq \alpha f(x) + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} - \alpha f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x) = (e^{f(x)} - \alpha f(x) - 1)' = e^{f(x)} f'(x) - \alpha f'(x),$$

οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ με:

$$g'(1) = e^{f(1)} f'(1) - \alpha f'(1) = e^0 f'(1) - \alpha f'(1) = (1 - \alpha) f'(1)$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε $g'(1) = 0$. Είναι:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha) f'(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1, \text{ αφού } f'(1) \neq 0$$

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση, η οποία ισχύει για κάθε $x \in \Delta$, όπου Δ διάστημα και ζητείται να αποδειχθεί μια ισότητα, τότε συνήθως ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
- Για κάθε $x \in \Delta$, θεωρούμε συνάρτηση g με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.
- Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής $g(x) \geq g(x_0)$ ή $g(x) \leq g(x_0)$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ . Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει $g'(x_0) = 0$ από την οποία προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq \alpha x + 1$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ (1) . Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Λύση

Η εξίσωση (1) ισοδύναμα θα μας δώσει: $e^x - \alpha x - 1 \geq 0$ (2)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \alpha x - 1, x \in \mathbb{R}$

$$\text{Είναι } f(0) = e^0 - \alpha \cdot 0 - 1 = 0$$

Τότε από την (2) έχουμε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.

Οπότε από το Θεώρημα του Fermat έχουμε:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Μεθοδολογία

Αν μας δίνεται ως δεδομένη μια ανισωτική σχέση $f(x) \geq g(x)$ (ή $f(x) \leq g(x)$) και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια ζητούμενη τιμή , εργαζόμαστε ως εξής:

α) Δημιουργούμε την ισοδύναμη ανίσωση $f(x) - g(x) \geq 0$ (ή $f(x) - g(x) \leq 0$)

β) Θέτουμε νέα συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$

γ) Βρίσκουμε κατάλληλο x_0 τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Τότε έχουμε

$h(x) \geq h(x_0)$ (ή $h(x) \leq h(x_0)$) και προφανώς η συνάρτηση h παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο (ή μέγιστο).

δ) Τότε λόγω θεωρήματος Fermat $h'(x_0) = 0$. Από αυτή την εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη τιμή.

Παράδειγμα 2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) \geq x^2 + \eta \mu x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(0) = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Λύση

Η (1) ισοδύναμα θα μας δώσει $f(x) - x^2 - \eta \mu x \geq 0$ (2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^2 - \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $h(0) = f(0) - 0 - \eta \mu 0 = 0$

Τότε από την (2) έχουμε $h(x) \geq h(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'(x) - 2x - \sigma \upsilon \nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.

Οπότε από το Θεώρημα του Fermat έχουμε:

$$h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 2 \cdot 0 - \sigma \upsilon \nu 0 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1 \quad (3)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A θα έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Μεθοδολογία

Αν μας δίνεται ως δεδομένη μια ανισωτική σχέση $f(x) \geq g(x)$ (ή $f(x) \leq g(x)$) και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια ζητούμενη τιμή, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Δημιουργούμε την ισοδύναμη ανίσωση $f(x) - g(x) \geq 0$ (ή $f(x) - g(x) \leq 0$)

β) Θέτουμε νέα συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$

γ) Βρίσκουμε κατάλληλο x_0 τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Τότε έχουμε $h(x) \geq h(x_0)$

(ή $h(x) \leq h(x_0)$) και προφανώς η συνάρτηση h παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο (ή μέγιστο).

δ) Τότε λόγω θεωρήματος Fermat $h'(x_0) = 0$. Από αυτή την εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη τιμή.

Παράδειγμα 3.

Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$[f(x)]^2 + f(x) = e^{2x} + x^{2011} + 5x + 2010 \quad (1), \text{ τότε η } f \text{ δεν έχει ακρότατα.}$$

Λύση

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ ακρότατο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη, λόγω του θεωρήματος Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$. (2)

Παραγωγίζοντας τα δυο μέλη της σχέσης (1) θα έχουμε

$$2f(x)f'(x) + f'(x) = 2e^{2x} + 2011x^{2010} + 5 \quad (3)$$

Για $x = x_0$ η (3) θα μας δώσει $2f(x_0)f'(x_0) + f'(x_0) = 2e^{2x_0} + 2011x_0^{2010} + 5 \Leftrightarrow$ (λόγω της (2))
 $2e^{2x_0} + 2011x_0^{2010} + 5 = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα εργαζόμαστε ως εξής:

α) υποθέτουμε ότι η f έχει ακρότατο σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε λόγω θεωρήματος Fermat $f'(x_0) = 0$.

β) Με παραγωγή της δοσμένης σχέσης και αντικατάσταση του x με x_0 οδηγούμαστε σε ΑΤΟΠΟ.

Παράδειγμα 4.

Δίνονται σημεία $A(1, \alpha^x), B(-x-1, -1), \Gamma(1, -\alpha^x), \Delta(x+1, -1)$ με $0 < \alpha \neq 1$ και $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $(A\Delta) \geq (\Gamma B)$, να αποδείξετε ότι:

α) $x+1 \leq \alpha^x$

β) $\alpha = e$

Λύση

α) Είναι: $(A\Delta) \geq (\Gamma B) \Leftrightarrow (A\Delta)^2 \geq (\Gamma B)^2 \Leftrightarrow (1-x-1)^2 + (\alpha^x+1)^2 \geq (1+x+1)^2 + (-\alpha^x+1)^2 \Leftrightarrow$

$$x^2 + \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1 \geq 4 + 4x + x^2 + \alpha^{2x} - 2\alpha^x + 1 \Leftrightarrow 4\alpha^x \geq 4x + 4 \Leftrightarrow \alpha^x \geq x + 1.$$

β)

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:
 $x + 1 - \alpha^x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0)$
Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:
 $f'(x) = (x + 1 - \alpha^x)' = 1 - \alpha^x \ln \alpha$
οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με:
 $f'(0) = 1 - \alpha^0 \ln \alpha = 1 - \ln \alpha$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $f'(0) = 0$.

Είναι: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$

Μεθοδολογία

Αν μας δίνεται ως δεδομένη μια ανισωτική σχέση $f(x) \geq g(x)$ (ή $f(x) \leq g(x)$) και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια ζητούμενη τιμή, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Δημιουργούμε την ισοδύναμη ανίσωση $f(x) - g(x) \geq 0$ (ή $f(x) - g(x) \leq 0$)

β) Θέτουμε νέα συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$

γ) Βρίσκουμε κατάλληλο x_0 τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Τότε έχουμε $h(x) \geq h(x_0)$ (ή $h(x) \leq h(x_0)$) και προφανώς η συνάρτηση h παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο (ή μέγιστο).

δ) Τότε λόγω θεωρήματος Fermat $h'(x_0) = 0$. Από αυτή την εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη τιμή.

Παράδειγμα 5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^3 - 3x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$. Να βρείτε:

- α) Τις πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .
- β) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .
- γ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-2, 2]$.

α) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι:

- Τα άκρα του πεδίου ορισμού, δηλαδή τα -2 και 2 .
- Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(-2, 2)$.
- Τα σημεία του διαστήματος $(-2, 2)$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

Η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο διάστημα $(-2, 0)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x + 3$. Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \in (-2, 0) \text{ δεκτή.}$$

Άρα το $-\frac{3}{2}$ είναι πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου.

Η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο διάστημα $(0, 2)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 3$. Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0, 2) \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ x = 1 \in (0, 2) \text{ δεκτή} \end{cases}$$

Άρα το 1 είναι πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου.

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

Για $-2 < x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + 3x - 0}{x} = \frac{x(x + 3)}{x} = x + 3, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 3) = 3$$

Για $0 < x < 2$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 3x - 0}{x} = \frac{x(x^2 - 3)}{x} = x^2 - 3, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3) = -3$$

Είναι:

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3$$

οπότε η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

Άρα το 0 είναι πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου.

Επομένως οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων είναι: $-2, -\frac{3}{2}, 0, 1$ και 2 .

β) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι:

- Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(-2, 2)$.
- Τα σημεία του διαστήματος $(-2, 2)$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι: $-\frac{3}{2}, 0$ και 1 .

γ) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-2, 0)$ και $(0, 2]$ ως πολυωνυμική. Επίσης η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) (= 0)$. Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A = [-2, 2]$. Επειδή είναι και μη σταθερή στο διάστημα αυτό, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $A = [-2, 2]$.

Είναι m και M αντίστοιχα η μικρότερη και η μεγαλύτερη από τις τιμές της f στις θέσεις των πιθανών τοπικών ακροτάτων.
Έχουμε:

$$f(-2) = -2, \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = -2 \quad \text{και} \quad f(2) = 2.$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A) = \left[-\frac{9}{4}, 2\right]$.

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε μια συνάρτηση f , που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ , τότε:

α) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f είναι:

- Τα άκρα του διαστήματος Δ , (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).
- Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

β) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και μη σταθερή σε κλειστό διάστημα A , το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο A . Οι αριθμοί m και M είναι αντίστοιχα η μικρότερη και η μεγαλύτερη από τις τιμές της f στις θέσεις των πιθανών τοπικών ακροτάτων.

Παράδειγμα 6.

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3\alpha^2 x^2 - 6\alpha x - 1$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 12x^2 - 6\alpha^2 x - 6\alpha$ (1).

Για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της, αρκεί:

- $f'(1) = 0$ και
- Η $f'(x)$ να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = 1$.

Είναι:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 12 - 6\alpha^2 - 6\alpha = 0 \Leftrightarrow 6(\alpha^2 + \alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \text{ ή } \alpha = 1$$

- Για $\alpha = -2$ είναι:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 12(x-1)^2 \geq 0$$

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

$f(1)$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ } άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, οπότε η f
 $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, για $\alpha = -2$.

- Για $\alpha = 1$ είναι:

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1) = 6(2x+1)(x-1), \text{ οπότε}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ή } x = 1 \text{ και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \text{ ή } x > 1$$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και μάλιστα τοπικό ελάχιστο στο $x_0=1$, για $\alpha=1$.

X	$-\infty$	$-1/2$		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$					
		$f\left(-\frac{1}{2}\right)$		$f(1)$	

Μεθοδολογία

Όταν δίνεται μια μη σταθερή συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ζητείται να βρεθεί μια παράμετρος ή μια σχέση μεταξύ παραμέτρων, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ , τότε απαιτούμε να ισχύουν τα εξής:

- $f'(x_0)=0$ και
- Η $f'(x)$ να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .

Παράδειγμα 7.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + \ln(1 + f^2(x)) = e^{f(x)} + 2x^3 + x - 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι $f'(x_0) = 0$ (1). Επειδή καθεμία από τις συναρτήσεις $\ln(1 + f^2(x))$ και $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση $2x^3 + x - 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left[f(x) + \ln(1 + f^2(x)) \right]' = (e^{f(x)} + 2x^3 + x - 1)' \Rightarrow$$

$$f'(x) + \frac{1}{1 + f^2(x)} (1 + f^2(x))' = e^{f(x)} f'(x) + 6x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) + \frac{2f(x)}{1 + f^2(x)} f'(x) = e^{f(x)} f'(x) + 6x^2 + 1 \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$$f'(x_0) + \frac{2f(x_0)}{1 + f^2(x_0)} f'(x_0) = e^{f(x_0)} f'(x_0) + 6x_0^2 + 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 6x_0^2 + 1 = 0$$

που είναι άτοπο γιατί η εξίσωση $6x_0^2 + 1 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε ανοικτό διάστημα, συνήθως εργαζόμαστε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, οπότε το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat και επομένως θα είναι $f'(x_0) = 0$. Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, αντικαθιστούμε το x με το x_0 και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 8.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)} + 3f(x) + 1 = x^3 + 4x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι $f'(x_0) = 0$ (1).

Επειδή η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση $x^3 + 4x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(e^{f(x)} + 3f(x) + 1)' = (x^3 + 4x)' \Rightarrow$$

$$e^{f(x)} f'(x) + 3f'(x) = 3x^2 + 4 \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 3f'(x_0) = 3x_0^2 + 4 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 3x_0^2 + 4 = 0$$

που είναι άτοπο γιατί η εξίσωση $3x_0^2 + 4 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε ανοικτό διάστημα, συνήθως εργαζόμαστε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, οπότε το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat και επομένως θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, αντικαθιστούμε το x με το x_0 και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 9.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) > 0$ και $f^3(x) - 4x^2f(x) = x^8 + 8$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι $f'(x_0) = 0$ (1).

Επειδή η συνάρτηση $f^3(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, η συνάρτηση $4x^2f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και η συνάρτηση $x^8 + 8$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολωνυμική, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(f^3(x) - 4x^2f(x))' = (x^8 + 8)' \Rightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x) - 8xf(x) - 4x^2f'(x) = 8x^7 \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$$3f^2(x_0)f'(x_0) - 8x_0f(x_0) - 4x_0^2f'(x_0) = 8x_0^7 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$8x_0^7 + 8x_0f(x_0) = 0 \Rightarrow 8x_0(x_0^6 + f(x_0)) = 0 \quad (3)$$

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $x_0^6 + f(x_0) > 0$, οπότε από (3) έχουμε $x_0 = 0$ (4).

β) Για $x = 0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f^3(0) - 4 \cdot 0^2 f(0) = 0^8 + 8 \Leftrightarrow f^3(0) = 8 \Leftrightarrow f(0) = 2$$

$$\text{Επίσης έχουμε: } f'(0) \stackrel{(4)}{=} f'(x_0) \stackrel{(1)}{=} 0$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 2$$

Μεθοδολογία

α) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα και ικανοποιεί μια σχέση ισότητας.

Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε και με δεδομένο ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι $f'(x_0) = 0$.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης, αντικαθιστούμε το x με το x_0 , οπότε από την εξίσωση που προκύπτει υπολογίζουμε το x_0 .

β) Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $e^{2-x}f(x) \geq 1 + 2\sin(\pi x)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2,3)$.

Λύση

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(2,3)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

Το σημείο $A(2,3) \in C_f$ άρα $f(2) = 3$, οπότε για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) αρκεί να βρούμε την $f'(2)$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{2-x}f(x) - 2\sin(\pi x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$e^{2-x}f(x) \geq 1 + 2\sin(\pi x) \Leftrightarrow e^{2-x}f(x) - 2\sin(\pi x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(2)$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 2$ του πεδίου ορισμού της.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{2-x}f(x) - 2\sin(\pi x) - 1)' = \\ &= e^{2-x}(2-x)'f(x) + e^{2-x}f'(x) + 2\eta\mu(\pi x)(\pi x)' = \\ &= -e^{2-x}f(x) + e^{2-x}f'(x) + 2\pi\eta\mu(\pi x) \end{aligned}$$

οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 2$ με:

$$\begin{aligned} g'(2) &= -e^{2-2}f(2) + e^{2-2}f'(2) + 2\pi\eta\mu(2\pi) = \\ &= -1 \cdot 3 + 1 \cdot f'(2) = f'(2) - 3 \end{aligned}$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε $g'(2) = 0$.

$$g'(2) = 0 \Leftrightarrow f'(2) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 3$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(2,3)$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 3 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y = 3x - 3$$

Μεθοδολογία

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$(ε): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι γνωστό από την υπόθεση, οπότε για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) αρκεί να υπολογίσουμε την $f'(x_0)$.

Αξιοποιούμε τη δοθείσα ανισοτική σχέση, ακολουθώντας την εξής μέθοδο:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε συνάρτηση g με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.
- Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής $g(x) \geq g(x_0)$ ή $g(x) \leq g(x_0)$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει $g'(x_0) = 0$. Από την τελευταία ισότητα υπολογίζουμε την $f'(x_0)$ και στη συνέχεια βρίσκουμε την εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει $x^2 + f^2(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

Λύση

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

Το σημείο $A(0,1) \in C_f$, άρα $f(0) = 1$, οπότε για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) αρκεί να βρούμε τον αριθμό $f'(0)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $x^2 + f^2(x) \geq 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + f^2(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $x^2 + f^2(x) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + f^2(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$
Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.
- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$g'(x) = (x^2 + f^2(x) - 1)' = 2x + 2f(x)f'(x)$ οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με:

$g'(0) = 2f(0)f'(0) = 2f'(0)$, αφού $f(0) = 1$.

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε $g'(0) = 0$.

Είναι: $g'(0) = 0 \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 1$

Μεθοδολογία

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι γνωστό από την υπόθεση, οπότε για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) αρκεί να υπολογίσουμε την $f'(x_0)$.

Αξιοποιούμε τη δοθείσα ανισοτική σχέση, ακολουθώντας την εξής μέθοδο:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε συνάρτηση g με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ανισότητας.

- Μετασχηματίζουμε την αρχική ανισοτική σχέση και καταλήγουμε σε μια ανισότητα της μορφής $g(x) \geq g(x_0)$ ή $g(x) \leq g(x_0)$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$, οπότε έχουμε εξασφαλίσει και τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, επομένως ισχύει $g'(x_0) = 0$. Από την τελευταία ισότητα υπολογίζουμε την $f'(x_0)$ και στη συνέχεια βρίσκουμε την εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

Παράδειγμα 3.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 3]$ με $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ και σύνολο τιμών το $[-1, 5]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (1, 3)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 3]$, επομένως ισχύει το θεώρημα Μεγίστης - Ελαχίστης Τιμής, άρα θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [1, 3]$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $-1 = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = 5$ για κάθε $x \in [1, 3]$. Είναι $f(x_1) = -1$ και $f(x_2) = 5$, οπότε $x_1 \neq x_2$. Το x_1 (θέση ελαχίστου), όπως και το x_2 (θέση μεγίστου) δεν είναι δυνατόν να συμπίπτουν με τα άκρα του διαστήματος $[1, 3]$, αφού $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ και το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, 5]$. Επομένως τα $x_1, x_2 \in (1, 3)$ είναι δηλαδή εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f , οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, άρα $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (1, 3)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2] \subseteq [1, 3]$, αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό. Επίσης $f'(x_1) = f'(x_2)$, άρα ισχύει το θεώρημα Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Μεθοδολογία

α) Η συνέχεια της συνάρτησης f σε κλειστό διάστημα εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτων, σύμφωνα με το θεώρημα Μεγίστης - Ελαχίστης Τιμής. Δείχνουμε στη συνέχεια ότι οι θέσεις των δυο ακροτάτων δεν συμπίπτουν με τα άκρα, άρα είναι εσωτερικά σημεία του διαστήματος, οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat. Αυτό έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη δύο τουλάχιστον σημείων x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ έτσι, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, στο κλειστό διάστημα με άκρα τα x_1, x_2 , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Παράδειγμα 4.

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (1)
- $f(\alpha) + f(\beta) = f(\gamma)$, όπου $\gamma \in (\alpha, \beta)$ (2)

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, θα είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, οπότε θα ισχύει το θεώρημα Μεγίστης - Ελαχίστης Τιμής, άρα θα ισχύει:
 $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Αν υποθέσουμε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι $m = f(\alpha)$, τότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$f(\gamma) = m + f(\beta)$, οπότε λόγω της σχέσης (1) προκύπτει ότι $f(\gamma) < m$ που είναι άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι $m = f(\beta)$, τότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$f(\gamma) = f(\alpha) + m$, οπότε λόγω της σχέσης (1) προκύπτει ότι $f(\gamma) < m$ που είναι άτοπο.

Άρα η συνάρτηση f θα παρουσιάζει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat, οπότε $f'(x_0) = 0$.

Μεθοδολογία

Η συνέχεια της συνάρτησης f σε κλειστό διάστημα εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτων, σύμφωνα με το θεώρημα Μεγίστης - Ελαχίστης Τιμής. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δείχνουμε ότι η θέση x_0 του ελαχίστου της f δεν συμπίπτει με κανένα από τα δύο άκρα, οπότε είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Fermat και επομένως $f'(x_0) = 0$.