

TANANTOΞEIS



ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Περιοδικά φαινόμενα: Ονομάζονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται σε ίδια χρονικά διαστήματα.

Περίοδος T : ενός περιοδικού φαινομένου ονομάζεται το χρονικό διάστημα που διαρκεί μια πλήρης επανάληψή του.

Συχνότητα f : είναι το πλήθος " N ", των πλήρων επαναλήψεων του φαινομένου σε χρονικό διάστημα " Δt ", προς αυτό το χρονικό διάστημα. Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{\Delta t}$$

▷ Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι αν αναφερθούμε σε μία μόνο επανάληψη, θα ισχύει:

$$\left. \begin{matrix} N=1 \\ \Delta t=T \end{matrix} \right\} \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

Μονάδα (S.I.): $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

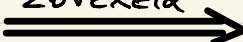
Κυκλική συχνότητα ω : είναι και αυγή
συχνότητα, με τη διαφορά ότι δείχνει
πόσες επαναλήψεις γίνονται σε χρονική
διάρκεια $2\pi \text{ sec}$.

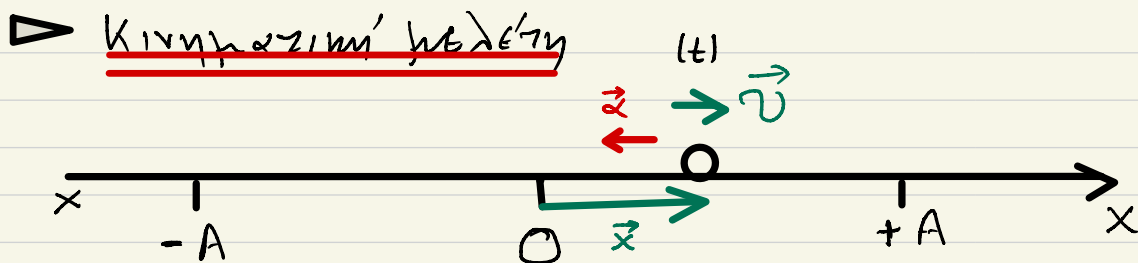
Ισχύει:

$$\omega = 2\pi f$$

Μονάδα (S.I.): 1 r/s

Λέμε ότι ένα σώμα εκτελεί
Απλή Αρμονική Ταλάντωση (ΑΑΤ) όταν
κινείται σε ευθεία τροχιά, παλινδρομικά,
γύρω από μια θέση ισορροπίας και
η απομάκρυνσή του από αυτήν είναι
ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.

Συνέχεια 



Ισχύει ότι: $x = A \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ όπου:

x : έζυγμιαία απομάκρυνση (σε m)

A : πλάτος (μέγιστη απομάκρυνση) (σε m)

ω : κυκλική συχνότητα (σε r/s)

t : χρονική στιγμή (σε sec)

ϕ_0 : Αρχική φάση (σε rad) ΚΔΛ

$\phi = \omega t + \phi_0$ φάση της ταλάντωσης (σε rad)

Επίσης ισχύουν:

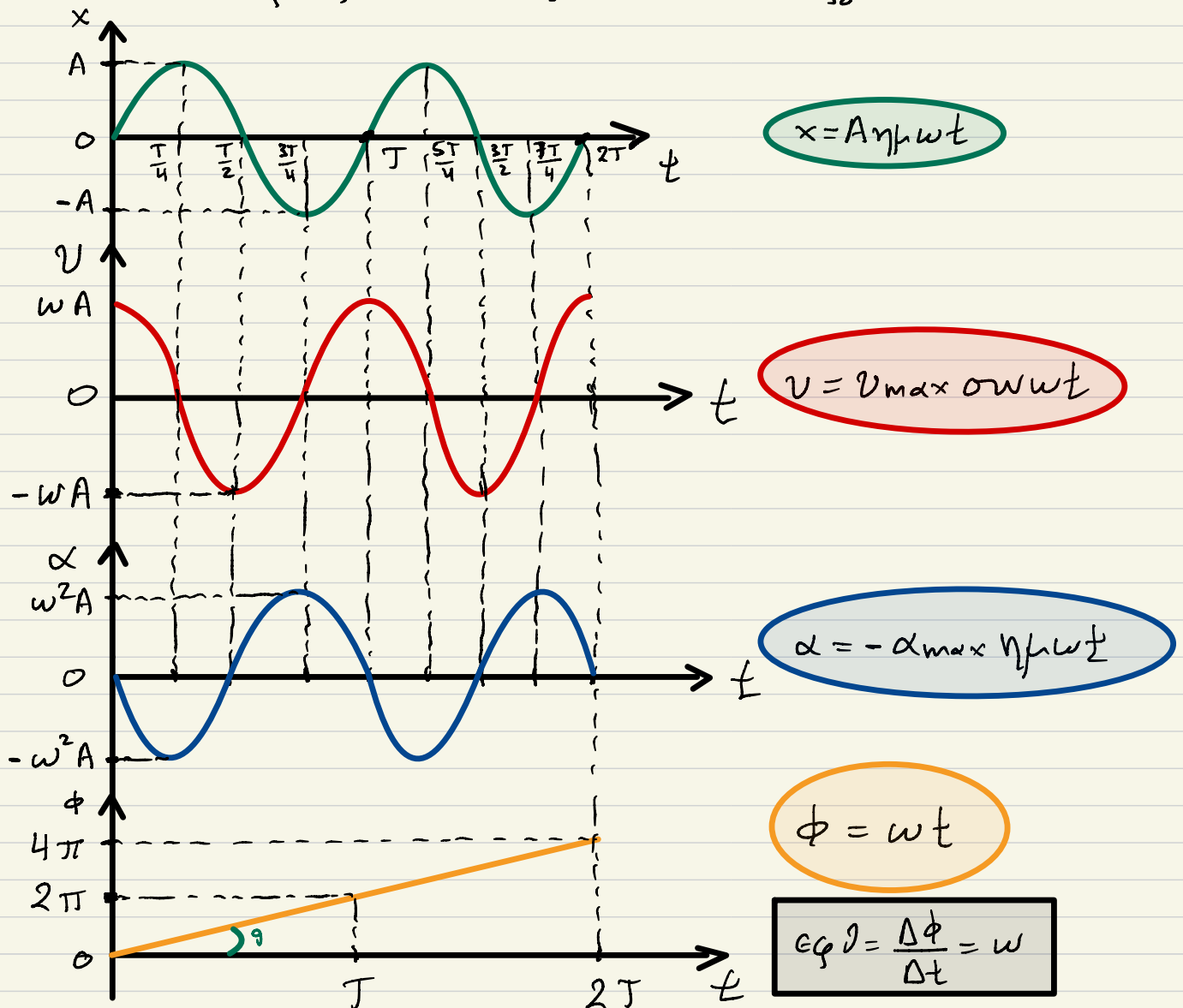
$$v = \omega A \sigma\omega(\omega t + \phi_0)$$

$$v_{\max} = \omega A$$

$$a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

$$a_{\max} = \omega^2 A$$

Γραφικές παραστάσεις ($\phi_0 = 0$)

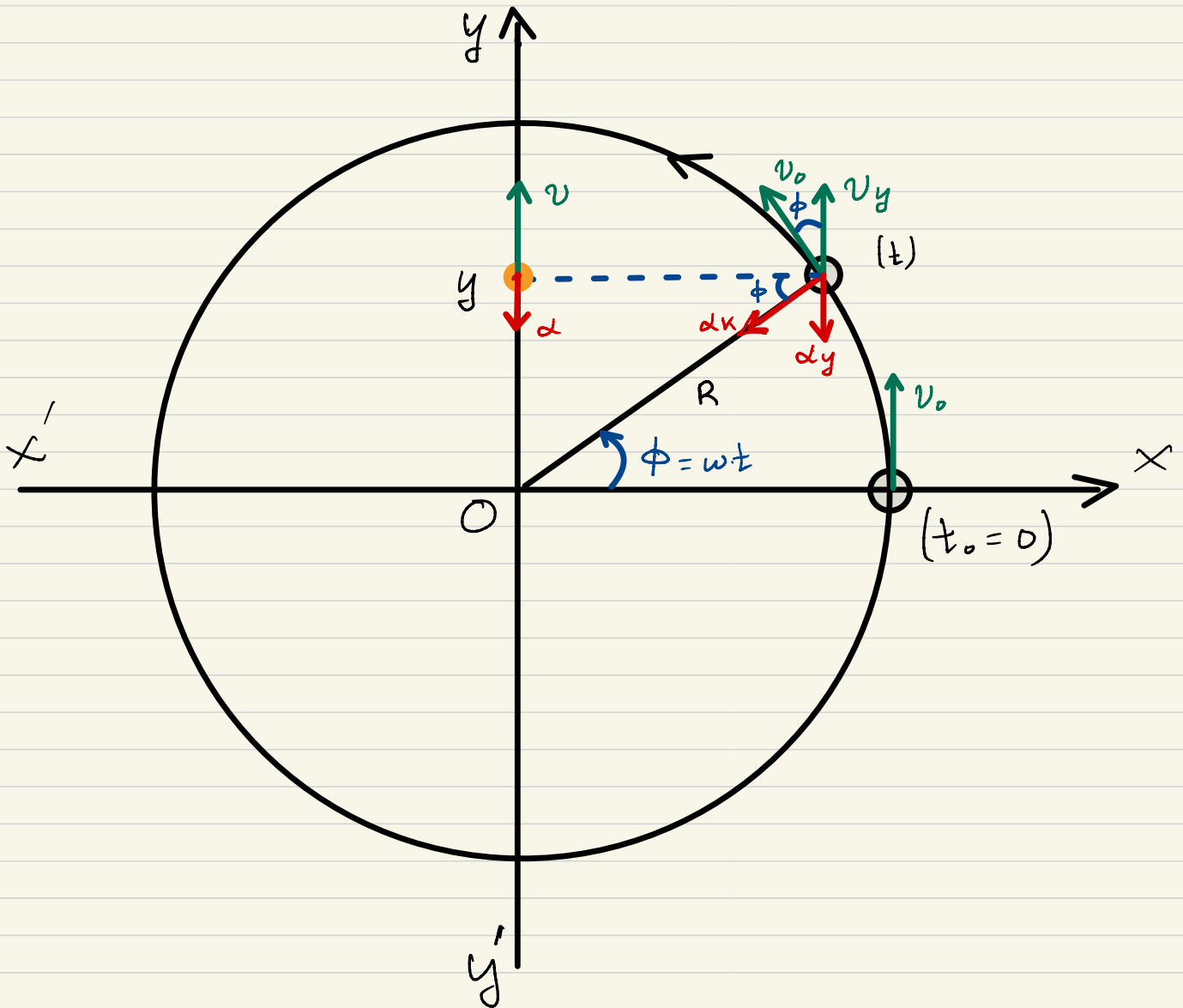


Παρατήρηση: Η συχνότητα της Α.Α.Τ.

που εκτελεί κάποιο σύστημα (ελαντωτής) εξαρτάται μόνο από τα κατευσαστικά χαρακτηριστικά του συστήματος.

Άρα κάθε ελαντωτής εκτελεί ΑΑΤ με την δυνή του χαρακτηριστική συχνότητα. (Ιδιοσυχνότητα)

Σχέση της Α.Α.Τ. με την Ο.Κ.Κ.



Καθώς το σώμα εκτελεί ΟΚΚ ακτίνας R , η προβολή του στον $γγ$ κινείται έτσι ώστε:

$$\eta \mu \phi = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \cdot \eta \mu \phi$$

$$\ominus \text{drehw } R = A \quad \left. \vphantom{\frac{y}{R}} \right\} \rightarrow y = A \eta \mu \omega t$$

Δηλαδή η προβολή ευτελεί Α.Α.Τ.!

Equations:
$$\left. \begin{aligned} v &= v_y = v_0 \sin \phi \\ \text{Also: } v_0 &= \omega R = \omega A \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \omega A \sin \omega t$$

Kal: $\alpha = -\alpha y = -\alpha k \cdot \eta \mu t$
 $A \lambda \lambda' \quad \alpha k = \omega^2 R = \omega^2 A \quad \} \Rightarrow \alpha = -\omega^2 A \eta \mu \omega t$

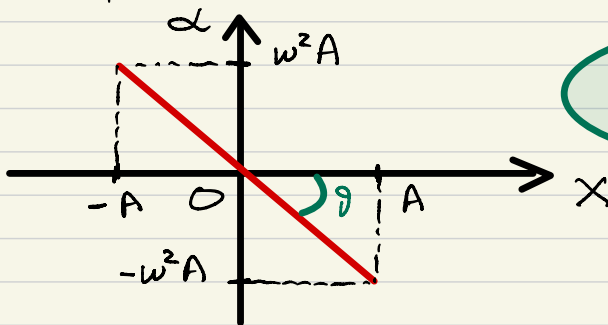
▷ Σχέση $\alpha(x)$:

Γσχεύει: $x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x = A \eta \mu \phi$ (1)

$$\alpha = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \alpha = -\omega^2 A \eta \mu \phi$$
 (2)

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{\alpha = -\omega^2 x}$$

Παρατηρούμε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{x}$, $|\vec{\alpha}| \propto |\vec{x}|$



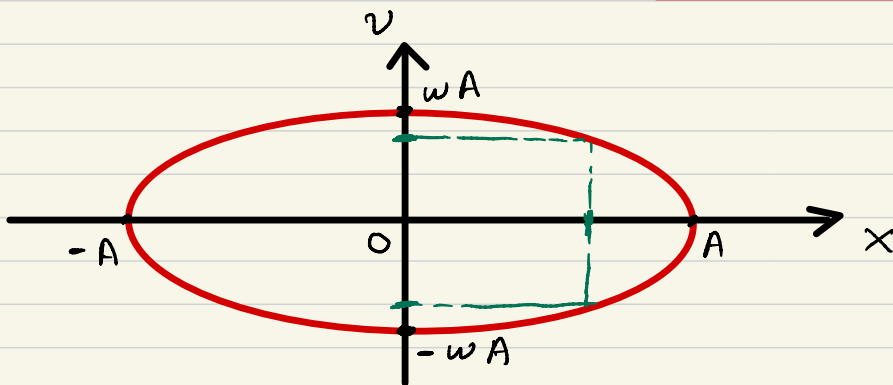
$$|\epsilon \phi \theta| = \frac{\omega^2 A}{A} = \omega^2$$

▷ Σχέση $v(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έχουμε: } x = A \eta \mu \phi \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta \mu^2 \phi = \frac{x^2}{A^2} \\ v = \omega A \sigma \nu \phi \Rightarrow \sigma \nu \phi = \frac{v}{\omega A} \Rightarrow \sigma \nu^2 \phi = \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1} \Rightarrow v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2) \Rightarrow \boxed{v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$$



▷ Δυναμική μελέτη

Ισχύει ότι: $\vec{F} = m\vec{a}$

Ειδικά στην Α.Α.Τ: $\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$ } $\Rightarrow \vec{F} = -m\omega^2 \vec{x}$

Θέτουμε $D = m \cdot \omega^2$ έτσι θα έρθει επαναφοράς ($1 \frac{N}{m}$)

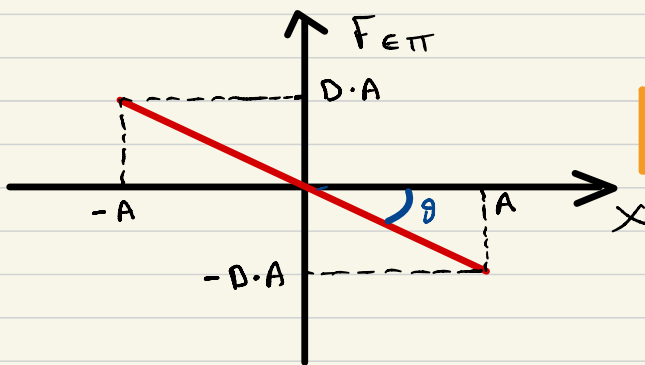
Τελικά: $\vec{F} = \vec{F}_{επ} = -D \cdot \vec{x}$ κρίτήριο για Α.Α.Τ.

Το D εξαρτάται από τα υλικά στοιχεία χαρακτηριστικά του υλικού.

Ισχύει: $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$



$$|\epsilon_{\theta}| = D$$

▷ Ενέργειακή μελέτη

Δυναμική Ενέργεια Ταλαντώσεως

$$U_T = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \eta^2 (\omega t + \phi_0) \quad \left(= \frac{1}{2} D A^2 \eta^2 \phi \right)$$

$$U_{T(\max)} = \frac{1}{2} D A^2$$

Κινητική Ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sigma^2 (\omega t + \phi_0) \quad \left(= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sigma^2 \phi \right)$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Ισχύει ότι: $U_{T(\max)} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = K_{\max}$

Ολική Ενέργεια Ταλαντώσεως

$$\begin{aligned} E &= U_T + K \\ &= \frac{1}{2} D A^2 \eta^2 \phi + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sigma^2 \phi = \\ &= \frac{1}{2} D A^2 [\eta^2 \phi + \sigma^2 \phi] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

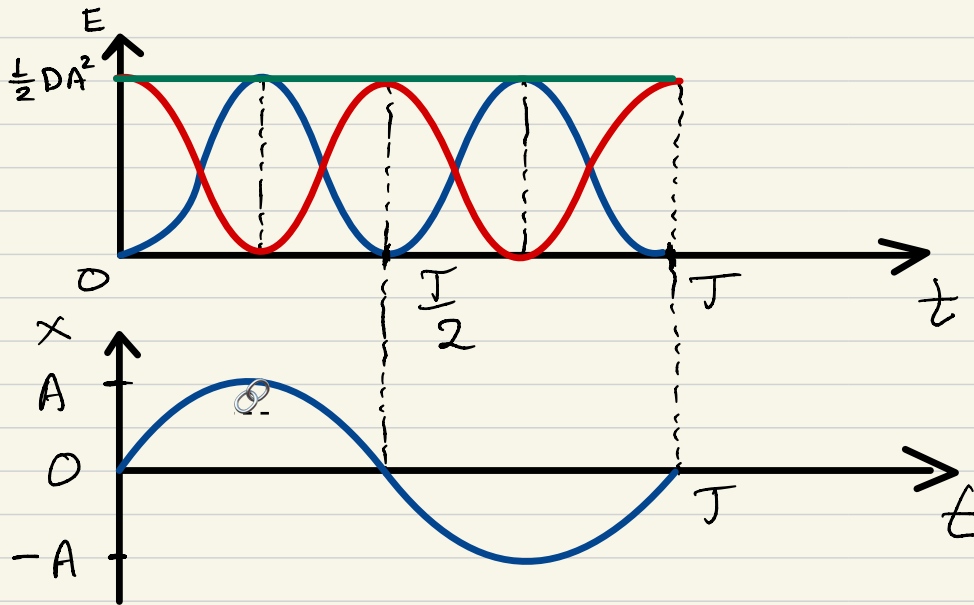
Αρχή
Διατήρησης της
Ενέργειας στην
Ταλάντωση

$$E = U_T + K$$

ή

$$\frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} D A^2$$

Γραφικές παραστάσεις (για $\phi_0 = 0$)



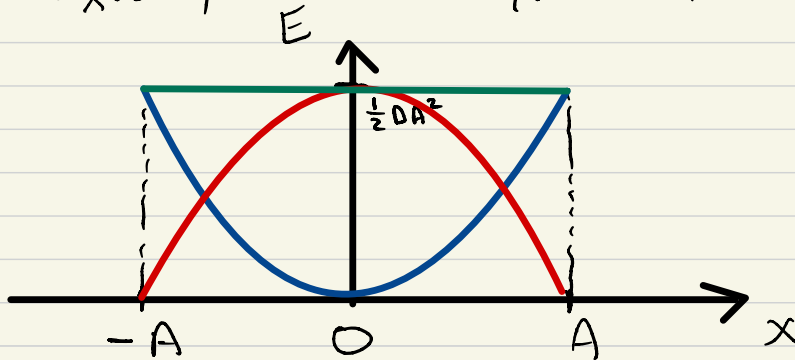
$$U_T = \frac{1}{2} DA^2 \sin^2 \omega t$$

$$K = \frac{1}{2} DA^2 \cos^2 \omega t$$

$$E = \frac{1}{2} DA^2$$

$$x = A \sin \omega t$$

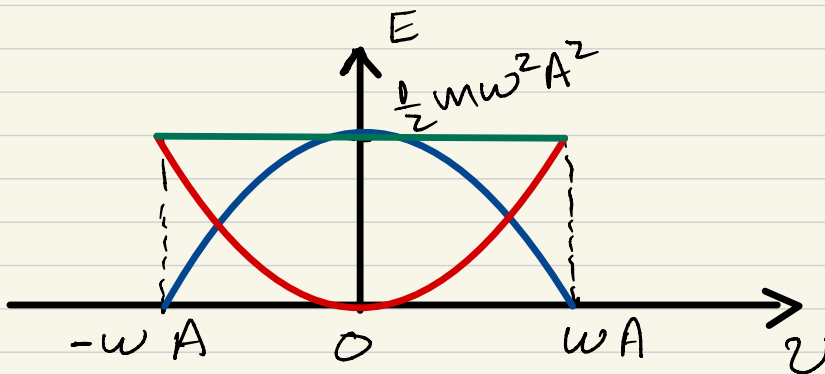
Οι ενέργειες μεταβάλλονται με διπλάσια συχνότητα από την ταλάντωση.



$$U_T = \frac{1}{2} Dx^2$$

$$K = E - U_T = \frac{1}{2} DA^2 - \frac{1}{2} Dx^2$$

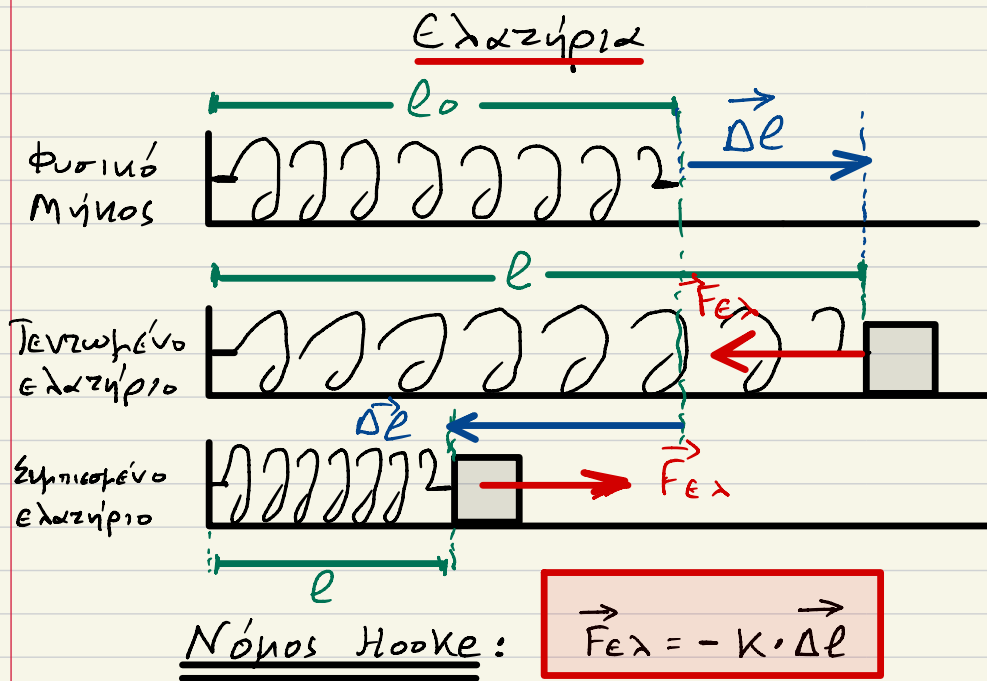
$$E = \frac{1}{2} DA^2$$



$$U_T = E - K =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$



Δηλαδή η δύναμη ελατηρίου έχει μέτρο ανάλογο του μέτρου της παραμόρφωσης του ελατηρίου και φορά αντίθετη της παραμόρφωσης. (επιτήκευσης)

Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου

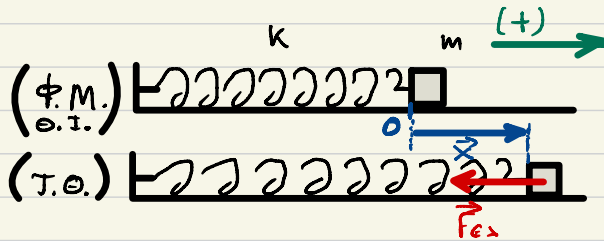
$$U_{el} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l^2$$

k : ϵ σταθερά ελατηρίου
(1 N/m (S.I.))

Σύστημα Μάζα-Ελατήριο

Έτα παρακάτω συστήματα μάζας-ελατηρίου (ταλαντωτές) να αποδείξετε ότι εκτελούν ΑΑΤ και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

① Σώμα - οριζόντιο ελατήριο.



$$\text{Στην (Τ.Θ.): } \Sigma F = -F_{el} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -k \cdot x \quad \text{οο} \quad \Sigma F = -Dx$$

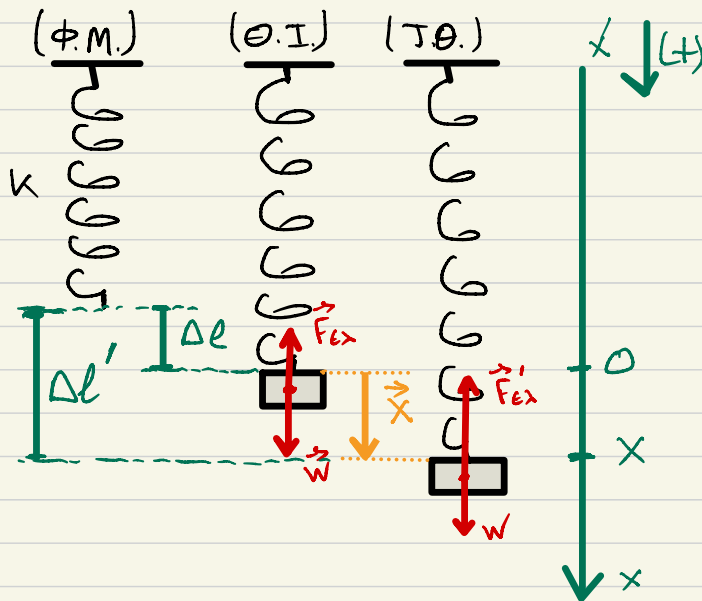
Άρα εκτελεί ΑΑΤ με

$$D = k$$

Επομένως

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

② Σώμα - κατακόρυφο ελατήριο



$$\begin{aligned} \text{(Θ.Ι.): } \Sigma F = 0 &\Leftrightarrow W - F_{el} = 0 \\ &\Leftrightarrow mg - k \cdot \Delta l = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{mg = k \cdot \Delta l} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Τ.Θ.): } \Sigma F &= W - F_{el}' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Sigma F = mg - k(\Delta l + x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Sigma F = \cancel{mg} - \cancel{k \Delta l} - kx \quad (1) \\ &\Leftrightarrow \underline{\Sigma F = -k \cdot x} \end{aligned}$$

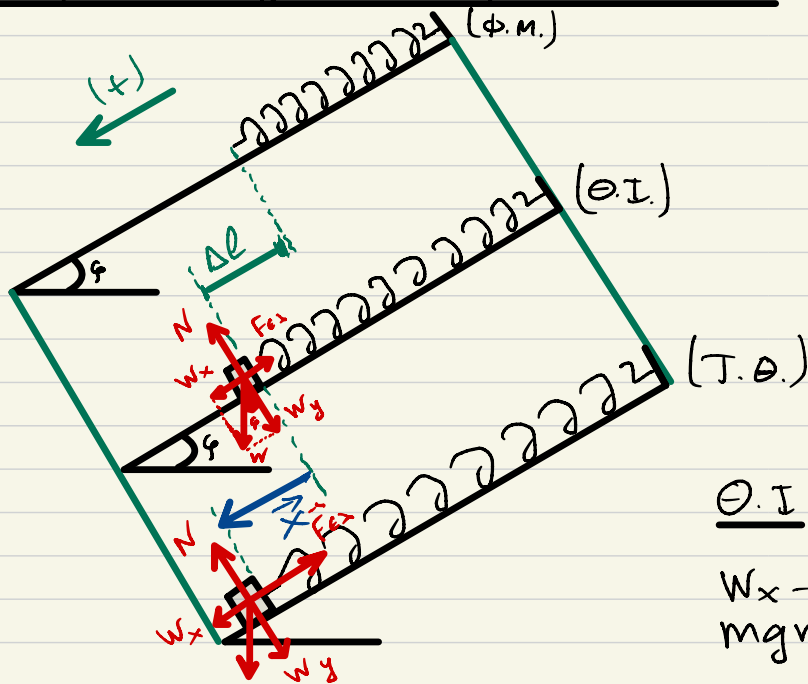
Άρα ΑΑΤ με

$$D = k$$

και

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

③ Σώμα - ελατήριο - κεκλιμένο επίπεδο



Θ.Ι.: $\sum F_x = 0 \Rightarrow$

$W_x - F_{ελ} = 0 \Rightarrow$
 $mg \eta \mu \phi = k \cdot \Delta \ell \quad (1)$

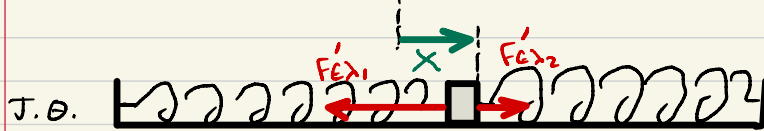
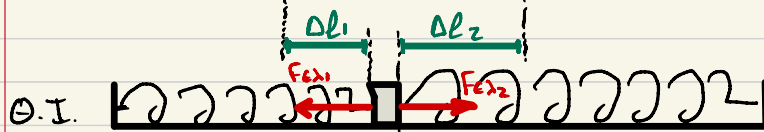
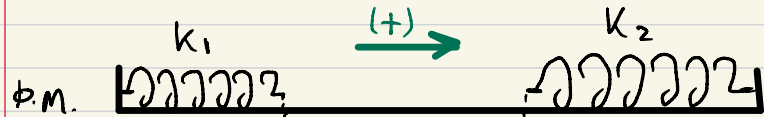
Τ.Θ.: $\sum F_x = W_x - F'_{ελ} =$
 $= mg \eta \mu \phi - k(\Delta \ell + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum F_x = \cancel{mg \eta \mu \phi} - \cancel{k \cdot \Delta \ell} - k \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\sum F_x = -k \cdot x}$ όρα AAT
hε D=k

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

④ Σώμα - δύο οριζόντια ελατήρια (εκατέρωθεν) (ή παράλληλα)



Θ.Ι.: $\Sigma F = 0 \Rightarrow$

$F_{ελ2} - F_{ελ1} = 0 \Rightarrow$

$k_2 \cdot \Delta l_2 = k_1 \cdot \Delta l_1 \quad (1)$

Τ.Θ.: $\Sigma F = F'_{ελ2} - F'_{ελ1} \Rightarrow$

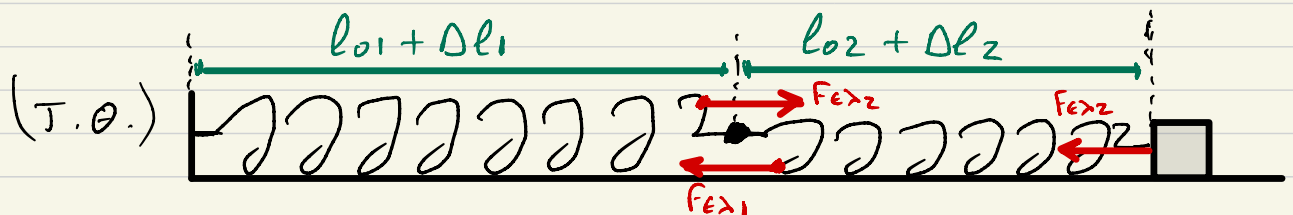
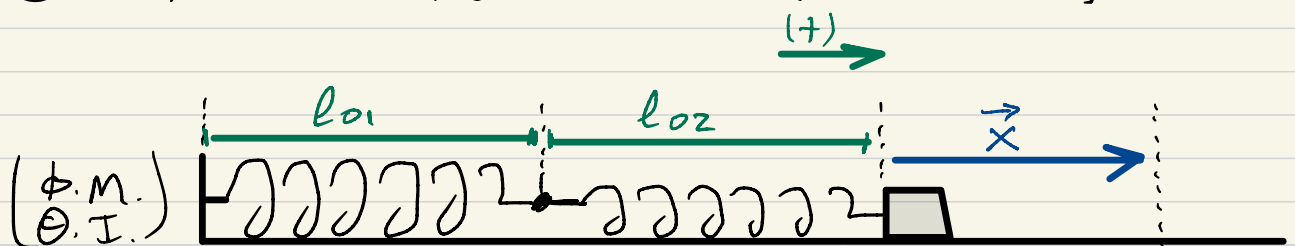
$\Rightarrow \Sigma F = k_2(\Delta l_2 - x) - k_1(\Delta l_1 + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma F = k_2 \Delta l_2 - k_2 x - k_1 \Delta l_1 - k_1 x \Rightarrow$

(1)
 $\Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x \quad \text{αφ'αυτ ηε} \quad \underline{\underline{D = k_1 + k_2}}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$

⑤ Σώμα - δύο οριζόντια ελατήρια (έε σειρά)



Ισχύουν: $F_{ελ2} = k_2 \cdot \Delta l_2$

$F_{ελ1} = k_1 \cdot \Delta l_1$

Επίσης: $F_{ελ1} = F_{ελ2} \quad (\text{Αράνη - Αντίδραση})$

Άρα: $\underline{k_1 \cdot \Delta l_1 = k_2 \cdot \Delta l_2} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{k_2 \Delta l_2}{k_1} \quad (1)$

Ακόμα: $\underline{x = \Delta l_1 + \Delta l_2} \quad (2)$

Για το σώμα στην Τ.Θ.: $\Sigma F = -F_{ελ2} \Rightarrow \Sigma F = -k_2 \cdot \Delta l_2 \quad (3)$

$$(2) \xrightarrow{(1)} x = \frac{k_2 \Delta l_2}{k_1} + \Delta l_2 \Rightarrow x = \frac{k_2 \Delta l_2 + k_1 \Delta l_2}{k_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{k_2 + k_1}{k_1} \Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot x \quad (4)$$

$$(3) \xrightarrow{(4)} \Sigma F = -k_2 \cdot \frac{k_1}{k_1 + k_2} x \Rightarrow \Sigma F = - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot x$$

Άρα Α.Α.Τ. με

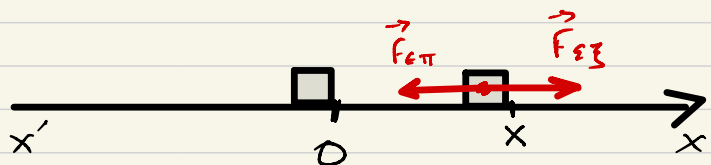
$$D = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(k_1 + k_2) \cdot m}{k_1 \cdot k_2}}$$



Απόδειξη της σχέσης της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης

Έστω ένα σώμα που μπορεί να εκτελέσει ΑΑΤ με D , το οποίο ηρεμεί στη θέση ισορροπίας x' του. Προκειμένου αυτό να εκτελέσει ταλάντωση θα πρέπει να το εκτρέψουμε από την Θ.Ι. ασκώντας του μια εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$. Τότε το έργο αυτής της $F_{εξ}$, αν η μετακίνηση γίνει με σταθερή και αμελητέα ταχύτητα, θα εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από εμάς (το περιβάλλον) στο σώμα και αποθηκεύεται σε αυτό ως δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.



Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει κάθε στιγμή να του ασκούμε δύναμη τέτοια ώστε:

$$F_{εξ} = -F_{επ} = -(-D \cdot x) \Rightarrow$$

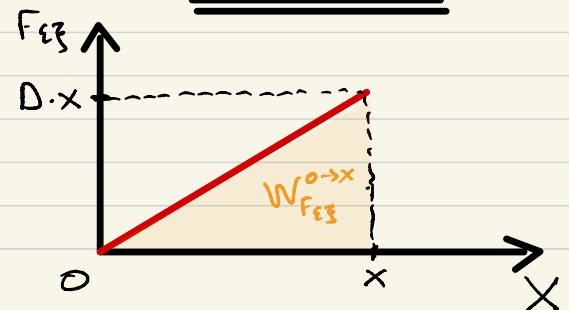
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{εξ} = D \cdot x}}$$

Υπολογισμός του $W_{F_{εξ}}^{0 \rightarrow x}$

$$W_{F_{εξ}}^{0 \rightarrow x} = U_T = E_{μβ} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot D \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U_T = \frac{1}{2} D \cdot x^2}}$$

$$\text{Τότε: } \underline{\underline{W_{F_{εξ}}^{0 \rightarrow x} = U_T}}$$





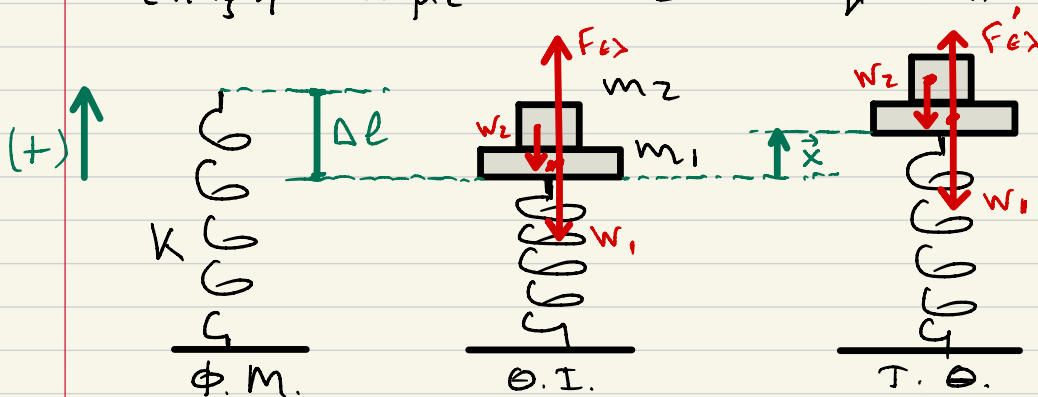
Ταλάντωση συστήματος σωμάτων - Χρόνος επαφής.

Στο σύστημα σωμάτων του σχήματος, το σώμα m_1 είναι δεμένο στο ελατήριο ενώ το σώμα m_2 απλώς ακουμπά στο m_1 .

(i) Να δείξετε ότι το σύστημα εκτελεί ΑΑΤ και να βρείτε το ω και την περίοδο T .

(ii) Να βρείτε τη σχέση της δύναμης επαφής που δέχεται το m_2 από το m_1 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση. (Να x ;))

(iii) Πόσο είναι το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος A_{max} της ταλάντωσης προκειμένου να μην χάνεται η επαφή ανάμεσα στα σώματα.



(i) Για το σύστημα των σωμάτων:

Θ.Ι. $\sum F_{\epsilon\zeta} = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} - W_1 - W_2 = 0 \Leftrightarrow K \cdot \Delta\ell = (m_1 + m_2)g^{(1)}$

Τ.Θ. $\sum F_{\epsilon\zeta} = F_{\epsilon\lambda}' - W_1 - W_2 \Rightarrow \sum F_{\epsilon\zeta} = K(\Delta\ell - x) - m_1 g - m_2 g \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum F_{\epsilon\zeta} = \cancel{K\Delta\ell} - Kx - \cancel{(m_1 + m_2)g} \stackrel{1)}{\Rightarrow} \sum F_{\epsilon\zeta} = -K \cdot x$

Άρα το σύστημα εκτελεί ΑΑΤ. με $\boxed{D_{ox} = K}$

Κοινά ω, T :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}}$$

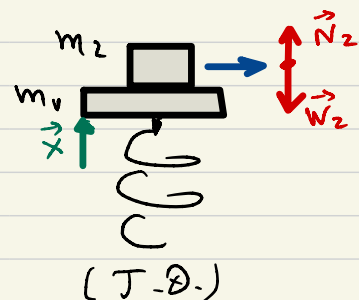
$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}}}$$

(ii) Εφόσον το m_2 μεζέχει στην ΑΑΤ του συστήματος, θα ισχύει μόνο για αυτό:

$$\underline{\sum F = -m_2 \omega^2 x} \Rightarrow$$

$$N_2 - m_2 g = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow$$

Συνέχεια



$$\Rightarrow N_2 = m_2 (g - \omega^2 x) \quad (\star)$$

(iii) Η επαφή ανάμεσα στα σώματα υπάρχει όσο ισχύει
ότι: $N_2 \geq 0 \xrightarrow{(\star)} m_2 (g - \omega^2 x) \geq 0 \Rightarrow g - \omega^2 x \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \leq \frac{g}{\omega^2} \quad \text{Αρα} \quad A_{\max} = \frac{g}{\omega^2}$$

Παρατήρηση (1):

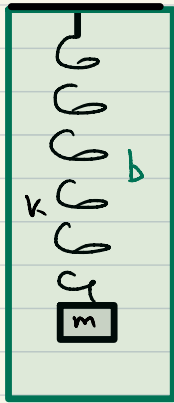
$$\left. \begin{aligned} A_{\max} &= \frac{g}{\omega^2} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\max} = \frac{g}{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow A_{\max} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

ή $A_{\max} = \Delta \ell$!

Αρα η επαφή διατηρείται οριζικά μέχρι την
θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

Δύναμη αντίστασης:



$$\vec{F}_{αντ} = -b \cdot \vec{v}$$

b : σε kg/s (έξαρτάται από το μέσο)

Ισχύει ότι:

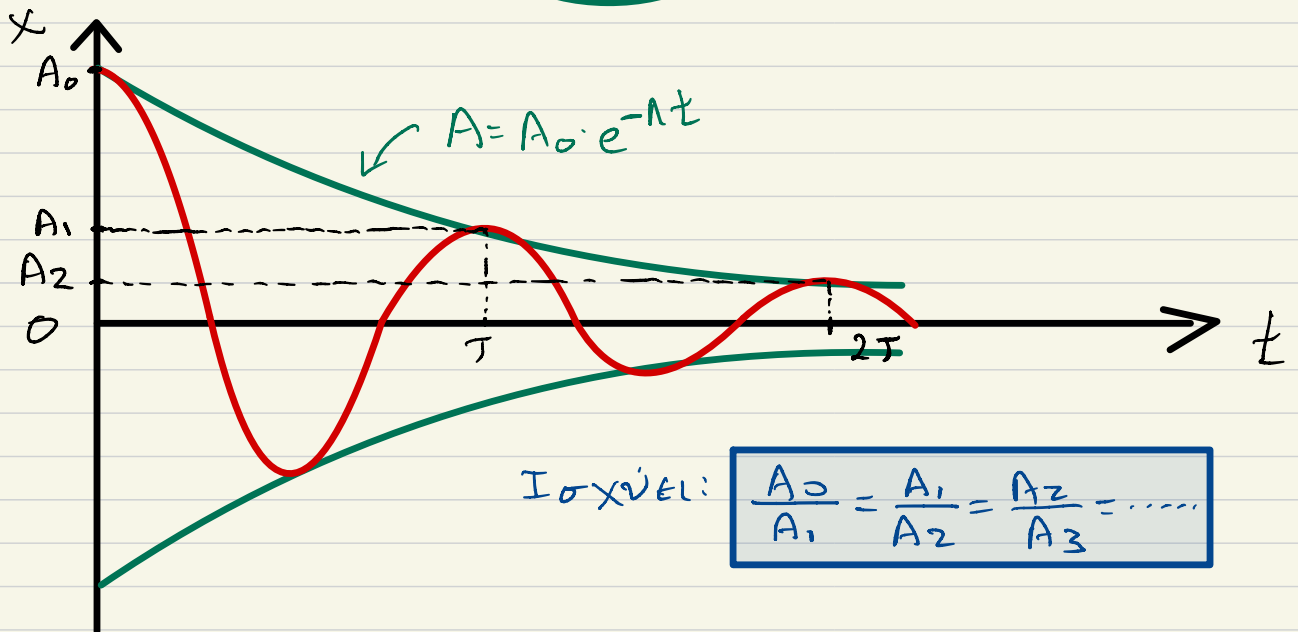
$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{F}_{αντ} = m \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$-D \cdot \vec{x} - b \vec{v} = m \vec{a} \Rightarrow D \cdot \vec{x} + b \vec{v} + m \vec{a} = 0$$

Πλάτος: $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t}$, $t = k \cdot T$

$$\Lambda = \frac{b}{2m}$$

έξαρτά χρόνο



Ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots$$

$$x = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \cdot \sin(\omega' t + \phi_0)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{D}{m} - \Lambda^2}$$

ΕΚΤΟΣ
ΥΠΗΧΕ

Παρατηρήσεις:

- ① Χρόνος ημιζωής " $T_{1/2}$ ": είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μέχρι να υποδιπλασιαστεί το πλάτος της ταλάντωσης.

Ισχύει: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$

Απόδειξη: $A = A_0 e^{-\Lambda t}$
Αν $t = T_{1/2}$ τότε $A = \frac{A_0}{2}$ } $\Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{-\Lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\Lambda T_{1/2}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\Lambda T_{1/2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e^{\Lambda T_{1/2}} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda \cdot T_{1/2} \cdot \overset{1}{\ln e} = \ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda \cdot T_{1/2} = \ln 2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

- ② Για την ενέργεια της ταλάντωσης:

$$\left. \begin{array}{l} E = \frac{1}{2} D A^2 \\ A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \end{array} \right\} \Rightarrow E = \frac{1}{2} D \cdot (A_0 \cdot e^{-\Lambda t})^2 \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} D A_0^2 \cdot e^{-2\Lambda t}$$

Θέτουμε: $E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$

Τότε: $E = E_0 \cdot e^{-2\Lambda t}$

ΑΔΕ:

$$E_0 = E + Q$$

όπου Q η θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον σε χρόνο: $0 \rightarrow t$
Ισχύει: $Q = |W_{\text{Favz}}|$

③ Απόδειξη του: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \dots = \frac{A_N}{A_{N+1}}$

Ισχύει ότι:

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$$

Για $t = k \cdot T$, $k \in \mathbb{N}$: $A_k = A_0 \cdot e^{-\Lambda k T}$ (1)

Για $t = (k+1) \cdot T$: $A_{k+1} = A_0 \cdot e^{-\Lambda (k+1) T}$ (2)

$$\frac{(1)}{(2)}: \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{\cancel{A_0} e^{-\Lambda k T}}{\cancel{A_0} e^{-\Lambda (k+1) T}} = e^{-\Lambda k T} \cdot e^{(k+1) \Lambda T} = e^{-\Lambda k T} \cdot e^{\Lambda k T + \Lambda T} \Rightarrow$$

$$\frac{A_k}{A_{k1}} = e^{-k\lambda T} \cdot e^{k\lambda T} \cdot e^{\lambda T} \Rightarrow \frac{A_k}{A_{k1}} = e^{\lambda T} = \text{σ ζαθρόο και ανεξάρτητο του } k.$$

④ Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας της ταλάντωσης

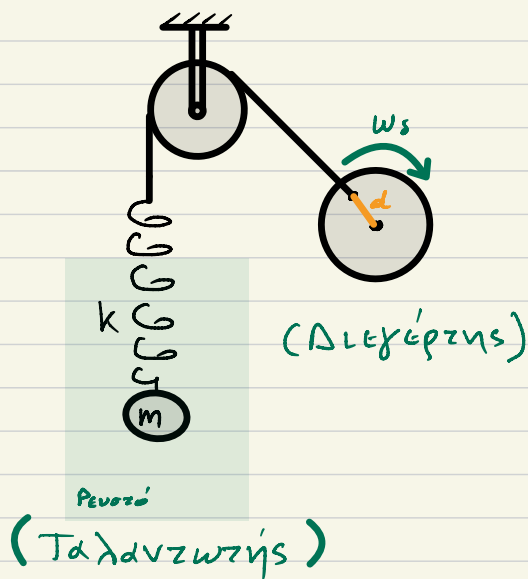
Ισχύει : $E_0 = E + |W_{F_{\text{αντ}}}| \Rightarrow E - E_0 = -|W_{F_{\text{αντ}}}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\Delta E = -|W_{F_{\text{αντ}}}|}$$

Άρα: $\frac{\Delta E}{\Delta t} = - \frac{\Delta |W_{F_{\text{αντ}}}|}{\Delta t} = - \frac{|F_{\text{αντ}} \cdot \Delta x|}{\Delta t} = -|-bv| \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta E}{\Delta t} = -bv^2} \quad \eta' \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = -bv^2} = P_{F_{\text{αντ}}}$$

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση



- ▷ Ταλάντωση: είναι κάθε σύστημα που μπορεί να εκτελεί ταλάντωση.
- ▷ Ιδιοσυχνότητα f_0 : είναι η συχνότητα με την οποία ένας ταλαντωτής εκτελεί Α.Α.Τ.
(Η τιμή της εξαρτάται από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του ταλαντωτή.)
- ▷ Διεγέρτης: είναι ένα μηχανικό σύστημα που αλληλεπιδρά με τον ταλαντωτή και μπορεί να του προσφέρει ενέργεια με περιοδικό τρόπο.

- ▷ Εξωτερική συχνότητα f_d : είναι η συχνότητα λειτουργίας του διεγέρτη. Μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε τιμή.

Κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση ο ταλαντωτής ταλαντώνεται με τη συχνότητα f_d του διεγέρτη.

Τώρα, το πλάτος A της εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από την συχνότητα f_d του διεγέρτη.

Όταν η συχνότητα του διεγέρτη f_d παίρνει τιμή ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή έχουμε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.
Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ΕΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ**

$$f_d = f_0 \Rightarrow A = \max$$

ΕΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ



Κατά τον συντονισμό έχουμε απορρόφηση ενέργειας από τον ταλαντωτή με τον βέλτιστο τρόπο.

Παρατηρήσεις :

① Για τις δυνάμεις ισχύει ότι:

$$\sum F = m \cdot a \Rightarrow F_{\text{επ}} + F_{\text{αντ}} + F_{\text{δ}} = m \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -D \cdot x - b \cdot v + F_{\text{δ}} = m \cdot a \Rightarrow m \cdot a + b \cdot v + D \cdot x = F_{\text{δ}}$$

② Κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή δεν ισούται με την μέγιστη κινητική ενέργεια.

$$U_{\text{max}} \neq K_{\text{max}}$$

Λογαρίθμοι

Ορισμός:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

π.χ. $\log_2 16 = 4$ $\log_3 27 = 3$
 $\log_2 0,5 = -1$ $\log_{\frac{1}{82}} 1 = 0$

Δεκαδικοί λογαρίθμοι:

$$\log x = y \iff 10^y = x$$

π.χ. $\log 1000 = 3$ $\log 0,1 = -1$
 $\log 100 = 2$ $\log 0,01 = -2$
 $\log 10 = 1$ $\log 0,001 = -3$

Νεπέριοι (ή φυσικοί) λογαρίθμοι:

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

Ιδιότητες λογαρίθμων:

- ① $\log 1 = 0$
- ② $\log_a a = 1$
- ③ $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
- ④ $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
- ⑤ $\log \frac{1}{a} = -\log a$
- ⑥ $\log a^b = b \cdot \log a$
- ⑦ $\log 10^x = x$
- ⑧ $10^{\log x} = x$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

$$\ln e^x = x$$

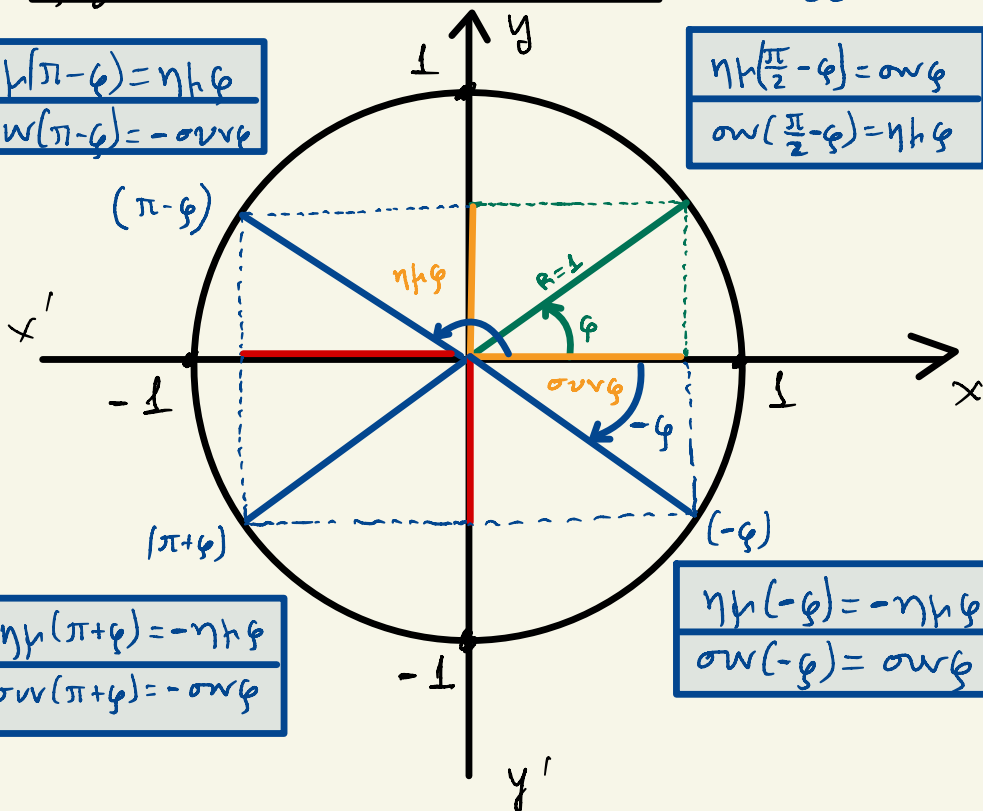
$$e^{\ln x} = x$$

Τριγωνομετρικές συνάρσεις

$$\eta\mu(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \sigma\omega\varphi$$

$$\begin{aligned}\eta\mu(\pi - \varphi) &= \eta\mu\varphi \\ \sigma\omega(\pi - \varphi) &= -\sigma\omega\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \varphi) &= \sigma\omega\varphi \\ \sigma\omega(\frac{\pi}{2} - \varphi) &= \eta\mu\varphi\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\eta\mu(\pi + \varphi) &= -\eta\mu\varphi \\ \sigma\omega(\pi + \varphi) &= -\sigma\omega\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta\mu(-\varphi) &= -\eta\mu\varphi \\ \sigma\omega(-\varphi) &= \sigma\omega\varphi\end{aligned}$$

$$\eta\mu 0 = 0$$

$$\sigma\omega 0 = 1$$

$$\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sigma\omega \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\eta\mu \pi = 0$$

$$\sigma\omega \pi = -1$$

$$\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\sigma\omega \frac{3\pi}{2} = 0$$

	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)
$\eta\mu\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\omega\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\eta\mu\phi = \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 2k\pi + \varphi_0 \\ \phi = 2k\pi + \pi - \varphi_0 \end{cases}$$

$$\sigma\omega\phi = \sigma\omega\varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 2k\pi + \varphi_0 \\ \phi = 2k\pi - \varphi_0 \end{cases}$$