

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών Α' Λυκείου

1. Αν $\alpha > -1$ και $\beta < 2$, να δείξετε ότι:
α. $(\alpha + 1) \cdot (\beta - 2) < 0$ β. $\alpha\beta - 2 < 2\alpha - \beta$
2. Αν $\alpha < 2 \leq \beta$, να δείξετε ότι:
α. $(\alpha - 2) \cdot (\beta - 2) \leq 0$ β. $\alpha\beta + 4 \leq 2\alpha + 2\beta$
γ. Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $x^2 - 5x + 6 < 0$.
3. α. Αν $\alpha < 3 < \beta$, να δείξετε ότι $9 + \alpha\beta < 3\alpha + 3\beta$.
β. Αν $\alpha \geq 1 > \beta$, να δείξετε ότι $1 + \alpha\beta \leq \alpha + \beta$.
4. Να αποδείξετε ότι:
α. $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$ β. $\alpha^2 + 9 \geq 3\alpha \cdot (4 - \alpha)$
γ. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) \geq 2\beta(3\alpha - 5\beta)$ δ. $(\alpha^2 + 1) \cdot (\beta^2 + 4) \geq (\alpha\beta + 2)^2$
5. Να δείξετε ότι
α. $x^2 - 4x + 5 > 0$ β. $9x^2 - 6x + 2 > 0$
γ. $2x^2 + 2x + 1 > 0$ δ. $5x^2 + 4x + 1 > 0$
6. Να δείξετε ότι
α. $x^2 + y^2 - 2x + 1 \geq 0$ β. $x^2 + y^2 - 4x + 6y \geq -13$
γ. $2x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ δ. $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1 \geq 0$
Πότε ισχύουν οι ισότητες;
Ποια είναι η ελάχιστη τιμή των παραστάσεων των 1^{ων} μελών των παραπάνω σχέσεων;
7. α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:
 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$.
β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.
8. Δίνονται οι παραστάσεις: $2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
α. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .
β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
9. Αν $-2 < x < 3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:
α. $A = x + 1$ β. $B = 2x - 3$ γ. $\Gamma = -3x + 1$ δ. $\Delta = \frac{5-2x}{3}$
10. Αν $2 < x < 3$ και $4 < y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις κάτω παραστάσεις.
α. $3y - 2x$ β. $3y^2 - 2xy$ γ. $x - \frac{1}{y}$ δ. $\frac{3y-2x}{x+1}$ ε. $x - 1 - \frac{3}{y-2}$ στ. $\frac{x-2}{y}$

