

1. ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

2. ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

3. ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

4. ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

(Μονάδες 13)

5. ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)