

Απόλυτες τιμές

"ένας παράγοντας που μένει σταθερός παρ' όλες τις καμπές της ιστορίας της φυσικής επιστήμης είναι η αποφασιστική σημασία της μαθηματικής φαντασίας". Freeman Dyson

Ορισμός (Αλγεβρικός): $|a| = \begin{cases} a & , \text{αν } a \geq 0 \\ -a & , \text{αν } a < 0 \end{cases}$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι ο εαυτός του αν είναι θετικός ή μηδέν, ή ο αντίθετός του αν είναι αρνητικός.

Ορισμός (Γεωμετρικός)



Ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a την απόστασή του από την αρχή O του άξονα των πραγματικών αριθμών. (Για την ακρίβεια την απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί στο a από το σημείο που αντιστοιχεί στο μηδέν.) Δηλαδή: $|a| = (OA)$.

Ιδιότητες

- $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ (Η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός)
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- $|a|^2 = a^2$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- $|a| = |-a|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- Αν $\theta > 0$ είναι: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$.
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.
(Το ίσον ισχύει αν τα a, b είναι ομόσημοι)
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

- Αν $\theta > 0$ είναι: $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta \text{ ή } x < -\theta$.
- Αν $\theta > 0$ είναι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.
- Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών εκφράζει την απόστασή τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

Αποδείξεις

A) $| \alpha \cdot \beta | = | \alpha | \cdot | \beta |$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

$$| \alpha \cdot \beta | = | \alpha | \cdot | \beta | \Leftrightarrow | \alpha \cdot \beta |^2 = (| \alpha | \cdot | \beta |)^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = | \alpha |^2 \cdot | \beta |^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \cdot \beta^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2 \text{ που ισχύει.}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η ιδιότητα: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{| \alpha |}{| \beta |}$.

B) Αν $\theta > 0$ είναι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

Απόδειξη:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow |x|^2 < \theta^2 \Leftrightarrow x^2 < \theta^2 \Leftrightarrow x^2 - \theta^2 < 0 \Leftrightarrow (x - \theta)(x + \theta) < 0,$$

Άρα οι $x - \theta$, $x + \theta$ είναι ετερόσημοι και επειδή $x - \theta < x + \theta$ θα είναι:

$$x - \theta < 0 \text{ και } x + \theta > 0, \text{ δηλαδή: } x < \theta \text{ και } x > -\theta \text{ και τελικά: } -\theta < x < \theta.$$

Γ) Αν $\theta > 0$ είναι: $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta \text{ ή } x < -\theta$

Απόδειξη:

Η ανίσωση: $|x| > \theta$ με $\theta > 0$, αληθεύει εκεί που δεν αληθεύει η ανίσωση $|x| \leq \theta$, δηλαδή δεν αληθεύει στο διάστημα $[-\theta, \theta]$.

Άρα αληθεύει για $x > \theta$ ή $x < -\theta$.

Δ) $| \alpha + \beta | \leq | \alpha | + | \beta |$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$$

που ισχύει.

ΠΑΓΙΔΕΣ ΣΤΑ ΑΠΟΛΥΤΑ

$$\boxtimes |2x - 1| = -3 \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ}$$

Μου δίνουν ένα απόλυτο να ισούται με έναν αρνητικό αριθμό. Αυτό όμως

είναι αδύνατο αφού η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός.

$$\boxtimes |x - 2| + |y - 1| = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ και } y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ και } y = 1.$$

Μου δίνουν το άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών να είναι μηδέν.

Αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν και οι δύο είναι μηδέν.

$$\boxtimes |x - 1| = -|y + 2| \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \text{ και } y + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = -2.$$

Μου δίνουν έναν αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός να ισούται με έναν

αριθμό μικρότερο ή ίσο του μηδενός. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν και οι δύο

είναι μηδέν. (Θα μπορούσα να τα περάσω όλα στο πρώτο μέλος και να έχω την

προηγούμενη περίπτωση).

$$\boxtimes |3x - 2| < 0 \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ}$$

$$|2x - 1| < -3 \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ}$$

Μου δίνουν μια απόλυτη τιμή να είναι μικρότερη από το μηδέν ή από έναν

αρνητικό αριθμό. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού η απόλυτη τιμή είναι

αριθμός μη αρνητικός.

$$\boxtimes |3x + 1| \geq 0 \text{ Ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad |4x - 1| > -3 \text{ Ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μου δίνουν μια απόλυτη τιμή να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν ή

μεγαλύτερη από έναν αρνητικό αριθμό. Αυτό όμως ισχύει πάντα αφού η

απόλυτη τιμή οποιουδήποτε αριθμού είναι αριθμός μη αρνητικός.

$$\boxtimes |x-1| \leq 0 \Rightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Μου δίνουν μια απόλυτη τιμή να είναι μικρότερη ή ίση με το μηδέν.

Όμως η

απόλυτη τιμή δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το μηδέν. Άρα το μόνο που

μένει είναι να είναι ίση με το μηδέν

$$\boxtimes |x-3| > 0 \Rightarrow \text{ισχύει για κάθε } x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3.$$

Μου δίνουν μια απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από το μηδέν. Αυτό ισχύει για κάθε αριθμό εκτός από το μηδέν.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΙΣ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ)

1. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. Αν $|x| + |y| = 0$ τότε $x = y = 0$.
3. Η ανίσωση $|x - 2| \leq 0$ είναι αδύνατη.
4. Ισχύει $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
5. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.
6. $|\alpha|^3 = \alpha^3$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. $|x^2 + 1| = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
8. Ισχύει: $|-x| < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
9. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| - |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
10. Αν $|x + 1| \leq 0$ τότε $x = -1$
11. Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $|x - 2| = -|x + 1|$.
12. Αν $|x - 2| + |y - 3| = 0$ τότε $x = 2$ και $y = 3$
13. Είναι: $d(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$.
14. Αν $|x - 3| = 3 - x$ τότε $x > 3$.
15. Ισχύει $|x|^2 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
16. $|x + 1|^2 = x^2 + 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
17. $|\alpha - 3| \leq 0$ τότε $\alpha < 3$.
18. Η $|-x| \leq -|x|$ ισχύει μόνο αν $x = 0$
19. Αν $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$ τότε α, β ετερόσημοι.
20. Αν $|x| > 3$ τότε $-3 < x < 3$.
21. Αν $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ τότε α, β ομόσημοι.
22. Αν $|\alpha| + \alpha = 0$ τότε $\alpha > 0$.
23. Αν $\alpha < \beta$ τότε $|\alpha| < |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
24. Αν $|\alpha| < |\beta|$ τότε $\alpha < \beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
25. Ισχύει $|\alpha| = -|\alpha|$ αν και μόνο αν $\alpha = 0$.
26. Ισχύει $|\alpha| - \alpha \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

27. Αν $x^2 = \alpha^2$ τότε $|x| = |\alpha|$.
28. Αν $x < -2$ τότε $|x| = -x$.
30. Αν $|\alpha| = |\beta|$ τότε $\alpha = \beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
31. Αν $x < -3$ τότε $|x| < -3$.
32. $|-x^2| = x^2$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
33. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
34. $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ για κάθε $\alpha \geq 0$
33. $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}_+$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΣΤΙΣ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις θέτοντας ένα από τα σύμβολα:
 $=, <, >, +, -, \leq, \geq, \pm$.

1. $|\alpha| = \alpha$ αν $\alpha \dots\dots\dots 0$
2. Αν $|\alpha - \beta| \leq 0$ τότε $\alpha \dots\dots\dots \beta$
3. Αν $|\alpha| + \alpha = 0$ τότε $\alpha \dots\dots\dots 0$.
4. $|\alpha|^2 \dots\dots\dots \alpha^2$ για κάθε πραγματικό α
5. Αν $-2 \leq x \leq 2$ τότε $|x| \dots\dots\dots 2$
6. Αν $|x - 2| = 0$ τότε $x \dots\dots\dots 2$.
7. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots \theta$ ($\theta > 0$)
8. $|x| \dots\dots\dots \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ ($\theta > 0$)
9. $|\alpha + \beta| \dots\dots\dots |\alpha| + |\beta|$ για οποιουσδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
10. $|x - 2| = x - 2$ τότε $x \dots\dots\dots 2$.
11. $|x| \dots\dots\dots x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
12. $|\alpha| \dots\dots\dots |-\alpha|$ για κάθε πραγματικό α
13. Αν $x \geq 3$ ή $x \leq -3$ τότε $|x| \dots\dots\dots 3$.
14. $|x| \dots\dots\dots \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta$ ($\theta > 0$)
15. $|x - y| \dots\dots\dots |y - x|$

16. Αν $|x - y| = y - x$ τότε $x \dots y$.

17. $|x^2 + 1| \dots x^2 + 1$

18. $|\alpha\beta| \dots |\alpha| \cdot |\beta|$ για οποιουδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

19. $|\alpha\beta| = \dots \alpha\beta$ αν α, β ετερόσημοι.

20. $|\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 \dots \beta^2$

Η ΠΟΔΗΛΑΤΙΣΣΑ

Το δρόμο πλάι στη θάλασσα περπάτησα
που 'κανε κάθε μέρα η ποδηλάτισσα

Βρήκα τα φρούτα που 'χε το πανέρι της
το δαχτυλίδι που 'πεσε απ' το χέρι της

Βρήκα το κουδουνάκι και το σάλι της
τις ρόδες το τιμόνι το πεντάλι της

Βρήκα τη ζώνη της βρήκα σε μιαν άκρη
μια πέτρα διάφανη που 'μοιαζε δάκρυ

Τα μάζεψα ένα ένα και τα κράτησα
κι έλεγα που 'ναι που 'ναι η ποδηλάτισσα

Την είδα να περνά πάνω απ' τα κύματα
την άλλη μέρα πάνω από τα μνήματα

Την Τρίτη νύχτωσ' έχασα τ' αχνάρια της
στους ουρανούς ανάψαν τα φανάρια της

Οδυσσέας Ελύτης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

AB/01. Βρείτε τις τιμές που παίρνει ο x αν:

A) $|x| = 3$ B) $|x| = -1$ Γ) $|x - 1| = 4$

AB/02. A) Αν $1 < x < 2$ απλοποιήστε τις παρακάτω παραστάσεις αφού βγάλετε τα απόλυτα:

$$A = |x - 1| + 2|x - 2|, \quad B = |3x - 2| + |1 - x|, \quad \Gamma = |x| - |x^2 - 4| - x.$$

B) Αν $0 < x < 1$ απλοποιήστε την:

$$Z = |x| + |x - 1| - 3|x - 2| + |4 - 3x|.$$

Γ) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ απλοποιήστε τις παραστάσεις:

$$A = |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta|, \quad B = |\alpha - \beta| + |\alpha + \beta|,$$

$$\Gamma = |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| + |\gamma - \alpha|,$$

$$\Delta = |\alpha| - |\beta - \alpha + 1|, \quad E = |\alpha(\alpha - \beta)| - |\beta + 1|.$$

AB/03. Απλοποιήστε (γράψτε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής) τις παρακάτω παραστάσεις: $A = |x^2 + 1| - x^2 + 1$

$$, \quad B = 2|x| - x + 2, \quad \Gamma = |x - 3| + x - 1,$$

$$\Delta = |2x - 1| + x - 2, \quad E = 2|x - 1| + |x - 3|,$$

$$Z = |x + 2| + |1 - x|, \quad H = |2x - 1| + |3 - x|, \quad \Theta = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}.$$

AB/04. A) Βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ αν $|x - 2| + |y - 4| = 0$.

B) Βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ αν $|x + y - 4| + |2x - y - 5| = 0$.

AB/05. A) Αν $|3x - 4| \leq 1$ μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται το x και το $2x + 1$;

B) Αν $|2x - 5| \leq 3$ μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται το x και το $3x + 2$;

Γ) Αν $|3x + 2| \leq 7$ μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο $3x + 1$;

AB/06. Δείξτε ότι για $x \neq 0$ ισχύει: $\left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|}$ (υψώνω

στο τετράγωνο)

AB/07. A) Αν $\alpha \neq 0$ δείξτε ότι : $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$

AB/08. A) Αν $\left| \frac{\alpha + 4}{\alpha + 1} \right| = 2$ δείξτε ότι : $|\alpha| = 2$

B) Αν $\left| \frac{x-9}{x-1} \right| = 3$ δείξτε ότι : $|x| = 3$. Γ) Αν $\left| \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \right| = 1$ δείξτε ότι $|\alpha| = 1$

AB/09. A) Αν $|2x-1| = |x-2|$ τότε $|x| = 1$.

B) Δείξτε ότι: $\left| \frac{x-4}{x-1} \right| > 2 \Leftrightarrow |x| < 2$.

Γ) Αν $|6x-1| = |2x-3|$ δείξτε ότι: $|x| = \frac{1}{2}$.

Δ) Αν $|6x+2| < |3x+4|$ δείξτε ότι $|x| < \frac{2}{3}$.

E) Αν $|3x-1| = |x-3|$ δείξτε ότι: $|x| = 1$.

AB/10. Δείξτε ότι : $\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \right| \leq 1$.

AB/11. Αν $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 1$, δείξτε ότι : $\left| \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \right| < 1$.

AB/12. Δείξτε ότι A) $|3x+2| = |2x+3| \Leftrightarrow |x| = 1$ και

B) $|4x-3| > |3x-4| \Leftrightarrow |x| > 1$.

AB/13. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2|x|-1}{|x|-x} = \frac{1}{2}$.

AB/14. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{|x|+3}{|x|+1} < 2$ και η: $\left| \frac{|x|+1}{x} \right| < 2$.

AB/15. Λύστε τις ανισώσεις: A) $|2x-3| < |2x+1|$, B) $|3x-1| < |2-3x|$.

AB/16. Υπολογίστε την παράσταση:

$$A = \left| \frac{x-y+\omega}{y-x-\omega} \right| + \left| \frac{x-2y}{2y-x} \right| + \left| \frac{y-\omega}{\omega-y} \right|.$$

(Αποδεικτικές)

AB/37. Να αποδειχθεί ότι: Α) $|x^2 + xy| \leq x^2 + |xy|$ (Υψώστε στο τετράγωνο)

Β) $\alpha\beta + |\alpha\beta| \geq |\alpha|\beta + \alpha|\beta|$ (Περάστε τα μπροστά και παραγοντοποιήστε).

Γ) Δείξτε ότι $|\alpha\beta| - \alpha|\beta| \geq 2\alpha - 2|\alpha|$.

Δ) Δείξτε ότι $|\alpha|^3 + |\alpha| \geq \alpha|\alpha|^2 + \alpha$.

Ε) Δείξτε ότι $|4\alpha + 3|\alpha|| = 3\alpha + 4|\alpha|$.

AB/38. Α) Αν $|2\alpha + 3\beta| < |3\alpha + 2\beta|$ δείξτε ότι: $|\alpha| > |\beta|$.

Β) Αν $|3\alpha + 2| < |2\alpha + 3|$ δείξτε ότι: $|\alpha| < 1$.

Γ) Αν $|\alpha - 2\beta| < |\beta - 2\alpha|$ να δείξετε ότι $|\beta| < |\alpha|$.

Δ) Αν $d(x, 0) < 2$ και $d(y, 4) < 3$ να δείξετε ότι $d(x + 2y, 8) < 8$.

Ε) Αν $2|x + 1| < |x + 4|$ δείξτε ότι: $|x| < 2$.

ΣΤ) Αν $2|x + 2| < |x + 8|$ δείξτε ότι: $|x| < 4$.

AB/39. Αν $\alpha, \beta \neq 0$ τότε:

Α) Αν $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ δείξτε ότι α, β ομόσημοι.

Β) Αν $|\alpha + \beta| = ||\alpha| - |\beta||$ δείξτε ότι α, β ετερόσημοι.

AB/40. Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ να αποδείξετε ότι:

Α) $|3x + 1| \leq 4$ Β) $|2x + 3y| \leq 8$ Γ) $|4x - 3y| \leq 10$

Δ) $|2x + y^2 + 1| \leq 7$ Ε) $|x^2 + y^2 - 2| \leq 7$.

AB/41. Δείξτε ότι: Α) $\frac{\alpha}{|\alpha|} \leq 1$ για κάθε $\alpha \neq 0$ Β)

$$\frac{3x-1}{|3x-1|} + 2\frac{2x-3}{|3-2x|} \leq 3 \quad \text{για } x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right\} \quad \text{και } \Gamma)$$

$$2\frac{x}{|x|} + \frac{3x-6}{|x-2|} \leq 5 \quad \text{για } x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}.$$

AB/42. Αν $|\alpha - \beta| \leq 1$ και $|\beta - \gamma| \leq 2$ δείξτε ότι : $|\alpha - \gamma| \leq 3$.

AB/43. Δείξτε ότι: $|2x - y - 2| + |y - 2x - 1| \geq 3$.

(Χρησιμοποιήστε τριγωνική ανισότητα)

AB/44. Δείξτε ότι: $\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| \geq 1$. (Με τριγωνική

ανισότητα)

AB/45. Αν $|2x - 3y| = 2|x| + 3|y|$ με $x \neq 0$ και $y \neq 0$ δείξτε ότι οι x, y είναι ετερόσημοι.