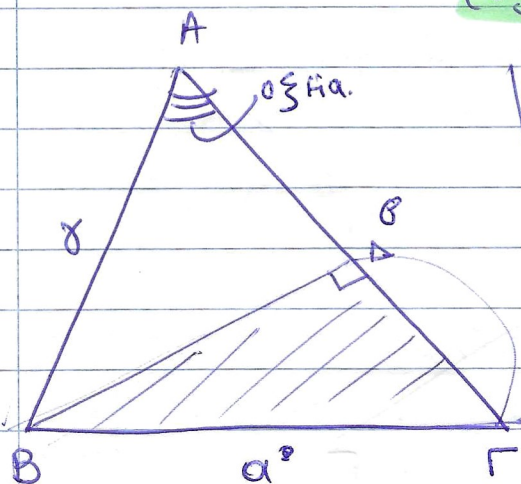


Θεώρημα 1 Ση. 50
(Οξεία γωνία)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$\triangle B\Gamma$ (ορθογώνιο $\hat{D} = 90^\circ$)

$$\boxed{a^2 = b^2 + \Delta\Gamma^2} \quad (\perp) \quad \text{και} \quad \text{απο}$$

$\triangle ABD$ (ορθ. $\hat{D} = 90^\circ$)

$$b^2 = AB^2 - AD^2$$

$$| \Delta b^2 = c^2 - AD^2 \quad (2)$$

$\hat{A} < 180^\circ$ άρα τα

τα Γ, D βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του A

$$\hat{\Gamma} < 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Delta\Gamma = A\Gamma - AD$$

$$\Delta\Gamma = b - AD$$

$$\hat{\Gamma} > 90^\circ$$

$$\Delta\Gamma = AD - A\Gamma$$

$$\Delta\Gamma = AD - b$$

Αρα $\Delta\Gamma^2 = (b - AD)^2 = b^2 + AD^2 - 2b \cdot AD \quad (3)$

Η (1) λόγω των (2), (3):

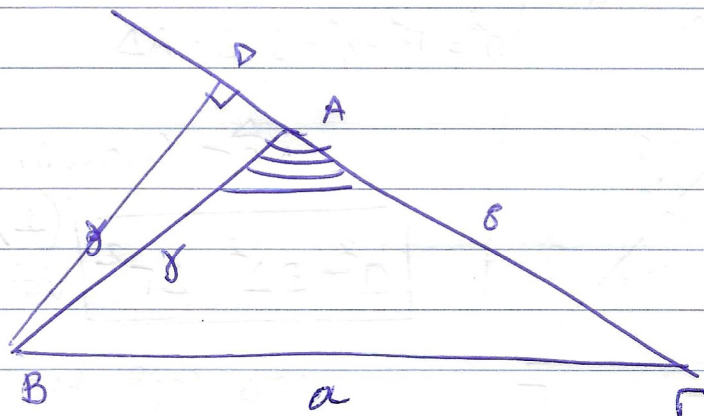
$$a^2 = \cancel{c^2 - AD^2} + b^2 + \cancel{AD^2} - 2b \cdot AD$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A} \quad \text{—}$$

Αν $\hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \Gamma \equiv D$ και $\Gamma \hat{A} B$: $a^2 = c^2 - b^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A$

$\cos A = 0$

Θεώρημα 2 σελ 51



$$a^2 = b^2 + \gamma^2 + 2 \cdot b \cdot AD$$

$$\begin{aligned} \triangle B\Gamma : a^2 &= (\triangle B^2) + \triangle \Gamma^2 \quad (1) \\ \triangle AB : \triangle B^2 &= \gamma^2 - AD^2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\triangle \Gamma = AD + A\Gamma \Rightarrow$$

$$\triangle \Gamma = AD + b \Rightarrow$$

$$\triangle \Gamma^2 = (AD + b)^2 \Rightarrow$$

$$\triangle \Gamma^2 = AD^2 + b^2 + 2b \cdot AD \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (1): a^2 &= \cancel{\gamma^2} - \cancel{AD^2} + \cancel{AD} + b^2 + 2b \cdot AD \Rightarrow \\ a^2 &= \gamma^2 + b^2 + 2b \cdot AD \Rightarrow \\ a^2 &= b^2 + \gamma^2 + 2b \cdot AD \end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ :

Σε τρίτο τρίγωνο Ισχύουν οι Ισοδυναμίες:

$$a^2 > b^2 + c^2 \iff \alpha \text{ και } \mu \alpha \alpha \nu \hat{A} > 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \iff \hat{A} = 90^\circ$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \iff \hat{A} < 90^\circ$$

Π.Χ. : $a=8, b=10, c=7$

↓
Μεγαλύτερο ή μικρό α'έρ $\hat{B}$: μεγαλύτερο ή μικρό

$$b^2=100, a^2=64, c^2=49$$

$$b^2=100$$

$$a^2+c^2=64+49=113$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 < a^2 + c^2 \Rightarrow \\ \hat{B} < 90^\circ \end{array} \right.$$

και ε'α'ς $\hat{B}$: μεγαλύτερο ή μικρό

για $\Rightarrow$ οξυγώνιο.

Εφαρμογή 1 σελ 53

γ : μεγαλύτερο ή μικρό

$$\gamma^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab(1) \Rightarrow \gamma^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow \hat{\gamma} : \text{ακείλεια}$$

$$\gamma^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot \Gamma \Delta (2)$$

Από (1), (2) $\cancel{a^2 + b^2} + \sqrt{3}ab = \cancel{a^2 + b^2} + \frac{2a \Gamma \Delta}{a}$

$$\sqrt{3} \cdot b = 2 \cdot \Gamma \Delta \Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma \Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b}$$

$$\Delta \Gamma : AD^2 = AG^2 - \Delta \Gamma^2 = b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 = b^2 - \frac{3}{4}b^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$AD = \frac{b}{2} = \frac{AG}{2} \Rightarrow \Gamma \epsilon \gamma = 30^\circ \Rightarrow \hat{\gamma} = 150^\circ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΤΡΑΝΤΖΑ

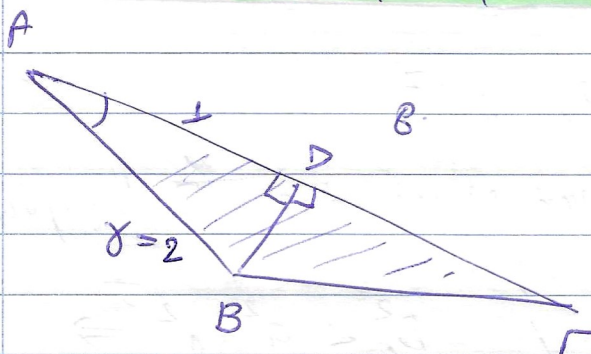
15.49

ΣΕ

21

16480.

Άσκηση επίλυση 3 γγ. ΣΣ



$$\begin{array}{l|l} \alpha = \sqrt{2} & \alpha^2 = 2 \\ \beta = 1 + \sqrt{3} & \beta^2 = (1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3} \\ \gamma = 2 & \gamma^2 = 4 \end{array}$$

~~88800000~~

$$\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b \cdot \gamma \cdot \cos A \Leftrightarrow$$

$$2b \cdot \gamma \cdot \cos A = b^2 + \gamma^2 - a^2 \Leftrightarrow$$

$$2b \cdot \gamma \cdot \cos A = 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2$$

$$2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \cos A = 6 + 2\sqrt{3}$$

$$\cancel{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \cos A = \cancel{2} (3 + \sqrt{3})$$

$$\cancel{2} (1 + \sqrt{3}) \quad \quad \quad \cancel{2} (1 + \sqrt{3})$$

$$AD = \frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

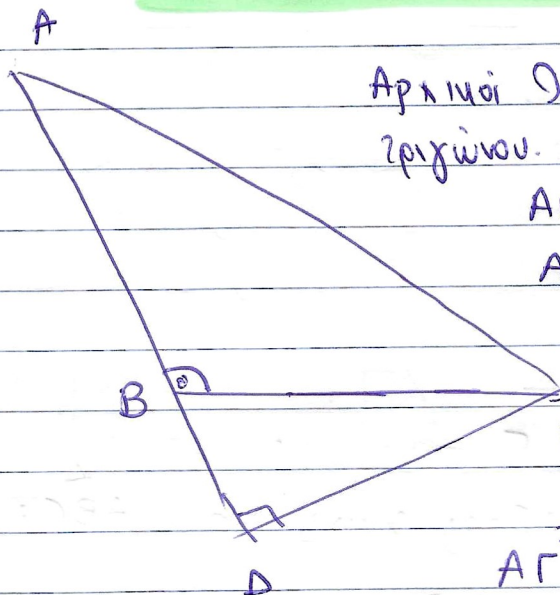
$$\Delta ABD : BD^2 = AB^2 - AD^2 \Leftrightarrow$$

$$BD^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow$$

$$BD^2 = 1$$

$$AD = 1 = \frac{AB}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$$

Αποδεικνύει ότι $\angle B > 90^\circ$



Αρχικοί θα ελέγξουμε το είδος του τριγώνου.

$$AG^2 = 144, \quad BG^2 = 49, \quad AB^2 = 81$$

$$AG^2 > AB^2 + BG^2 \text{ οπότε θα}$$

$$\text{για } \hat{B} > 90^\circ.$$

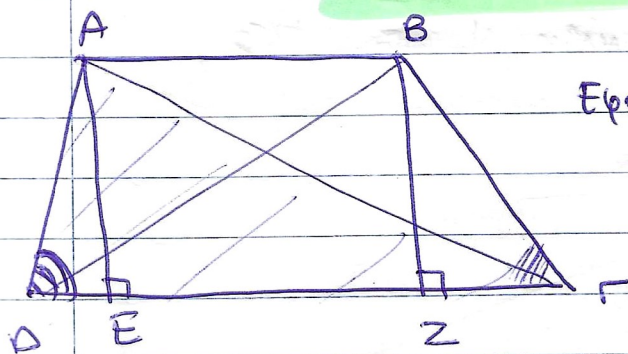
$$AG^2 = AB^2 + BG^2 + 2 \cdot AB \cdot BD \Leftrightarrow$$

$$BD = \frac{AG^2 - AB^2 - BG^2}{2AB} = \frac{144 - 81 - 49}{18}$$

$$= \frac{14}{18} \Leftrightarrow$$

$$BD = \frac{7}{9} \text{ cm.}$$

Αποδεικνύει ότι $\angle A < 90^\circ$



Εφαρμόζω το γινόμενο τριγώνων
για $\triangle AFD$, $\triangle BGD$. Πι

νω υποθέτω ότι $\hat{A}, \hat{D} < 90^\circ$.

Αν κάποια από τις $\hat{A}, \hat{D}$
ήταν αμβλεία, η απόδειξη θα

ήταν ανάλογη

$$\triangle AFD: \quad AF^2 = AD^2 + DF^2 - 2FD \cdot DE \quad (+)$$

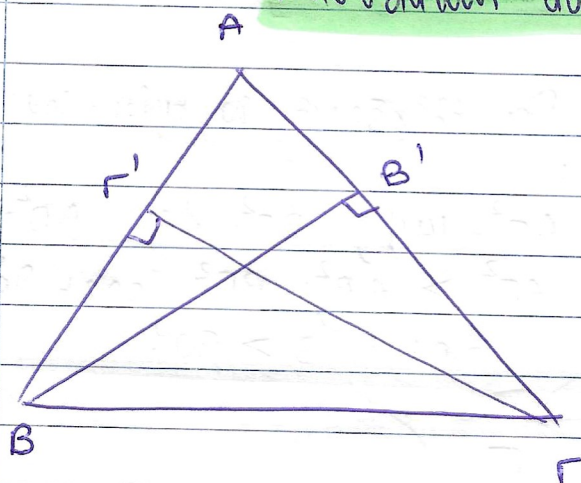
$$\triangle BGD: \quad BG^2 = BD^2 + GD^2 - 2GD \cdot GZ$$

$$AF^2 + BG^2 = (AD^2 + DF^2) + (BD^2 + GD^2) - 2FD \cdot DE - 2GD \cdot GZ =$$

$$AD^2 + BD^2 + 2DF^2 + 2GD^2 - 2FD \cdot DE - 2GD \cdot GZ =$$

$$AD^2 + BD^2 + 2FD (FD - DE - GZ) = AD^2 + BD^2 + 2FD \cdot \left(\frac{EZ}{AB} \right)$$

Απόδειξη άσκηση 3 στ 55



Εφαρμόζω το Πυθαγόρα οξείας γωνίας στο $\triangle AB\Gamma'$:

$$B^2 = a^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \gamma \cdot B\Gamma'$$

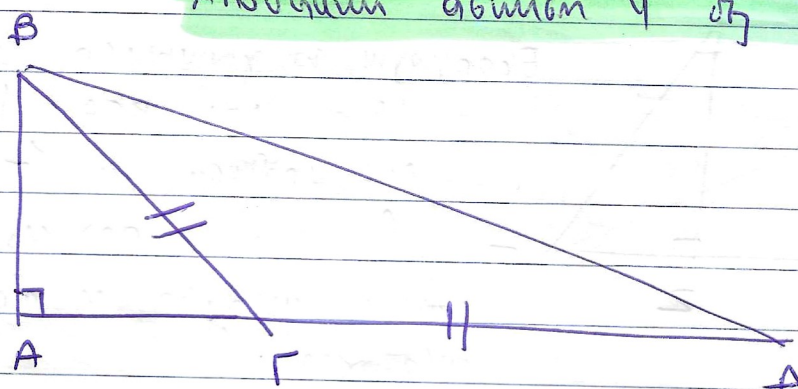
$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2 \cdot \beta \cdot \Gamma B' \quad (+)$$

$$\cancel{B^2} + \cancel{\gamma^2} = 2a^2 + \cancel{\gamma^2} + \cancel{\beta^2} - 2\gamma B\Gamma' - 2\beta \Gamma B'$$

$$2a^2 = 2\gamma B\Gamma' + 2\beta \Gamma B'$$

$$a^2 = \gamma B\Gamma' + \beta \Gamma B'$$

Απόδειξη άσκηση 4 στ 55



Στο $\triangle B\Gamma\Delta$: $\hat{\Gamma} > 90^\circ$

$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\Gamma\Delta \cdot A\Gamma \quad \text{ΒΓ=ΒΔ}$$

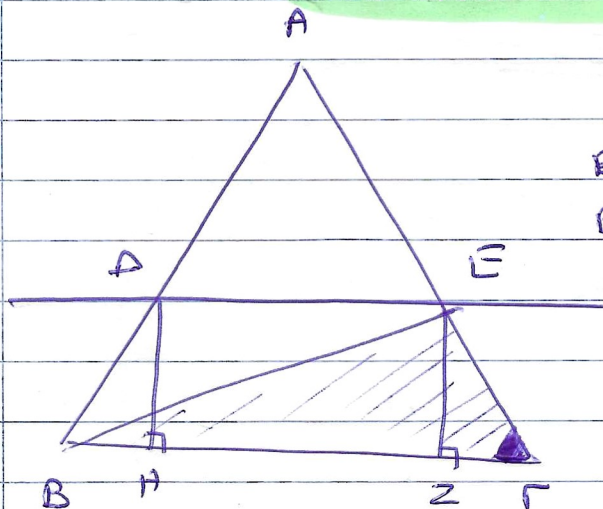
$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2B\Gamma \cdot A\Gamma$$

$$B\Delta^2 = 2B\Gamma^2 + 2B\Gamma \cdot A\Gamma$$

$$B\Delta^2 = 2B\Gamma(B\Gamma + A\Gamma) \xrightarrow{B\Gamma=\Gamma\Delta} B\Delta^2 = 2B\Gamma(\Gamma\Delta + A\Gamma) =$$

$$B\Delta^2 = 2B\Gamma^2$$

Απόδειξη του άξιωμα 5 της 55



$\triangle BE\Gamma \quad \hat{\Gamma} < 90^\circ$
 $BE^2 = EG^2 + BG^2 - 2BG \cdot ZG \Leftrightarrow$
 $BE^2 = EG^2 + BG(BG - 2ZG) \quad (1)$

Φέρω $\Delta H \perp BG$

$\triangle B\hat{H}, \triangle EZ\hat{\Gamma}$
 $\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$
 $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

$\Delta H = EZ$
 $\triangle B\hat{H} = \triangle EZ\hat{\Gamma} \quad \text{άρα}$
 $\boxed{BH = ZG}$

$\text{Αρα } BG - 2ZG = BG - ZG - ZG =$
 $BG - BH - ZG = HZ = \underline{\underline{\Delta E}}$

άρα (1): $BE^2 = EG^2 + BG \cdot \Delta E$

Απόδειξη του άξιωμα 6 της 55

Εστω α μ υπάρχει.

πρέπει $5a < 4b + 3\gamma \Leftrightarrow$

$(5a)^2 < (4b + 3\gamma)^2 \Leftrightarrow$

$25a^2 < 16b^2 + 9\gamma^2 + 24b\gamma \Leftrightarrow$

$25a^2 - 16b^2 - 9\gamma^2 - 24b\gamma < 0 \Leftrightarrow$

$25b^2 + 25\gamma^2 - 16b^2 - 9\gamma^2 - 24b\gamma < 0 \Leftrightarrow$

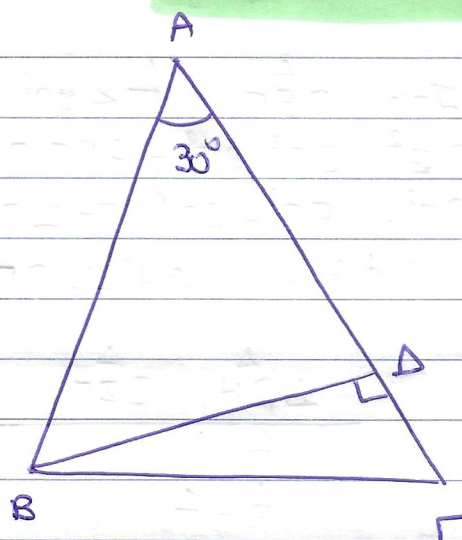
$9b^2 + 16\gamma^2 - 24b\gamma < 0$

$(3b - 4\gamma)^2 < 0 \quad \text{άπορο}$

Αρα δ μ υπάρχει.

$(a^2 = b^2 + \gamma^2)$

Συνθετο Θεμα (1) σελ 55



Φέρω το ύψος BD

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2 \cdot b \cdot AD \Leftrightarrow$$

$$a^2 = 2b^2 - 2b \cdot AD \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD, $\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{AB}{2}$

$$BD = \frac{\gamma}{2}$$

Οπότε

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = \gamma^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \frac{3\gamma^2}{4} \quad \wedge$$

$$AD = \frac{B\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Από (1), (2):

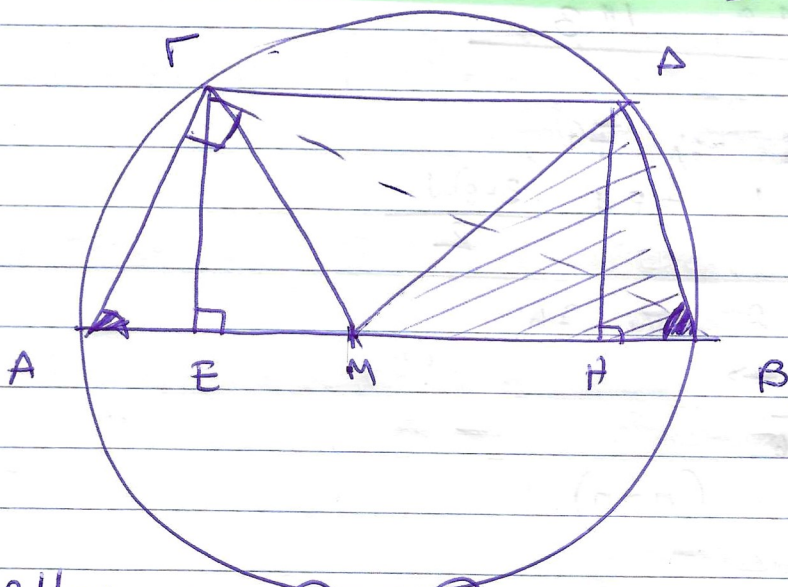
$$a^2 = 2b^2 - \cancel{2b^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 2b^2 - \sqrt{3} b^2$$

$$a^2 = b^2 (2 - \sqrt{3}) \quad \wedge$$

$$a = b \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad _$$

Σύμβαση Διχα (2) σελ 55



$$AB \parallel GD \Rightarrow \widehat{AG} = \widehat{BD} \Leftrightarrow \underline{\underline{AG = BD}} \quad (1)$$

$$\triangle MAG: \hat{A} < 90^\circ \text{ (αφού } \widehat{BG} < 180^\circ)$$

$$MG^2 = MA^2 + AG^2 - 2MA \cdot AE \quad (2)$$

$$\triangle MB\hat{D}:$$

$$MD^2 = MB^2 + BD^2 - 2MB \cdot BH \quad (3)$$

$$\text{το } \triangle GAB \text{ τρανζιτιο είναι ισοσκελές} \Rightarrow AE = BH \quad (4)$$

$$(2) + (3): \quad MG^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2 + \underline{AG^2 + BD^2} - 2MA \cdot AE - 2MB \cdot BH \quad (2)$$

$$MG^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2 + AG^2 + AG^2 - 2MA \cdot AE - 2MB \cdot AE \quad (3)$$

$$MG^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2 + 2AG^2 - 2AE(MA + MB)$$

$$MG^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2 + 2AG^2 - 2AG \cdot AB$$

$$MG^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2 + 2(\underbrace{AG^2 - AE \cdot AB})$$

$$MG^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$$

$$\triangle GAB$$

Είναι

$$\angle AGB = 90^\circ \text{ και}$$

$$GE = \text{ύψος στο } \triangle AGB$$