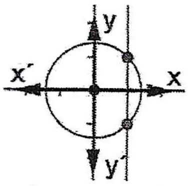
70

2ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στις Συναρτήσεις

Θέμα Α

Α1. **α)** Λ π.χ. ο κύκλος



β) Λ

π.χ. συναρτήσεις $f(x)=x, x\in\{0,1\}$ και $g(x)=x^2, x\in\{0,1\}$.

Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $\{0,1\}$, $f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=1$ άρα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\{0,1\}$ οπότε είναι ίσες χωρίς να έχουν τον ίδιο τύπο.

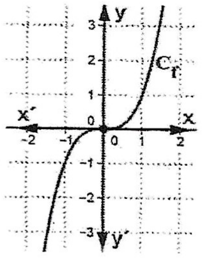
γ) Λ

π.χ. οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=x^2$.

Οι συναρτήσεις $f\circ g, g\circ f$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αλλά

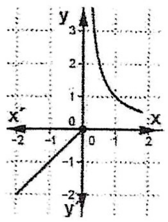
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2-1\neq(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x-1)^2$

δ) Λ



π.χ. Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.

ε) Σ



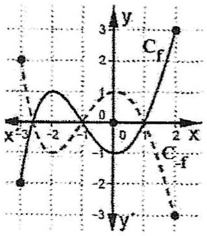
π.χ. Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

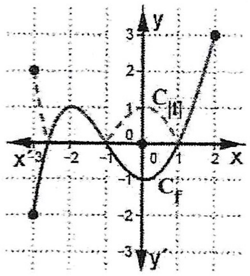
Α2. **α)** **i)** $A_f=[-3,2]$,**ii)** $f(A)=[-2,3]$,

iii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-3,2],[0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0]$.

iv) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο -3,το $f(-3)=-2$ και μέγιστο στο 2 , το $f(2)=3$.

β)





Θέμα Β

Β1. Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία και το α είναι η κλίση της, αν $\alpha>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ αν $\alpha<0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Β2. **α)** Σε κάθε περίπτωση η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow \alpha x+\beta=y \Leftrightarrow \alpha x=y-\beta \Leftrightarrow x=\dfrac{y-\beta}{\alpha}$, άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{y-\beta}{\alpha}$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε

$f^{-1}(x)=\dfrac{x-\beta}{\alpha}$, $x\in\mathbb{R}$. $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow \alpha x+\beta=\dfrac{x-\beta}{\alpha}\Leftrightarrow \alpha^2x+\alpha\beta=x-\beta$ (1)

Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μόνο όταν $\begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \alpha\beta = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \alpha\beta + \beta = 0 \end{cases}$.

Αν $\alpha = 1$, τότε $\beta + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ απορρίπτεται.

Αν $\alpha = -1$ τότε $-\beta + \beta = 0$ που ισχύει για κάθε $\beta \neq 0$.

β) i. Είναι $f(x) = -x + \beta = y \Leftrightarrow x = \beta - y$. Η σχέση $g(f(x)) = x^2 - 2$ γίνεται

$g(y) = (\beta - y)^2 - 2 = \beta^2 - 2\beta y + y^2 - 2$, άρα $g(x) = x^2 - 2\beta x + \beta^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

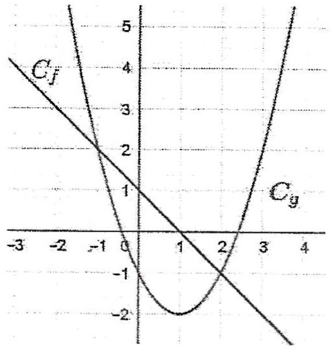
Επειδή η C_g διέρχεται από το Α, είναι $g(1) = -2 \Leftrightarrow 1 - 2\beta + \beta^2 - \cancel{2} = -\cancel{2} \Leftrightarrow (\beta - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

Τότε $g(x) = x^2 - 2x - 1$.

ii. $g(x) = x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2$.

Είναι $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2 \geq -2 \Leftrightarrow g(x) \geq -2 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$, άρα η g έχει ελάχιστο το -2 στο $x = 1$.

iii.



Θέμα Γ

Γ1. Η f ορίζεται όταν $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, οπότε $A_f = (-\infty, 1]$. Έστω $g(x) = -x - \sqrt{x},\ x \geq 0$ και $h(x) = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$. Για τη συνάρτηση $g \circ h$ πρέπει: $\begin{cases} x \in A_h \\ h(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq 1$ και

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = x - 1 - \sqrt{1-x} = f(x)$.

Γ2. Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$ (1), τότε

$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{1-x_1} < -\sqrt{1-x_2}$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow x_1 - \sqrt{1-x_1} < x_2 - \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow x_1 - 1 - \sqrt{1-x_1} < x_2 - 1 - \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Είναι $x \leq 1$ (1), $\sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{1-x} \leq 0$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow x - \sqrt{1-x} \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 - \sqrt{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1)$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 0$.

Γ4. Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει $\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ f(x) \leq 1 \text{ ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1$, άρα $A_{f \circ f} = (-\infty, 1]$.

Είναι $(f \circ f)(x) = f(x) - 1 - \sqrt{1 - f(x)} = x - 1 - \sqrt{1-x} - 1 - \sqrt{1 - x + 1 + \sqrt{1-x}} \Leftrightarrow$

$(f \circ f)(x) = x - 2 - \sqrt{1-x} - \sqrt{2 - x + \sqrt{1-x}}$

Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι:

$f(x_1) < f(x_2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2) \Rightarrow f \circ f \nearrow$

Γ5. $\alpha-\beta<\sqrt{1-\alpha}-\sqrt{1-\beta} \Leftrightarrow \alpha-\sqrt{1-\alpha}<\beta-\sqrt{1-\beta} \Leftrightarrow \alpha-1-\sqrt{1-\alpha}<\beta-1-\sqrt{1-\beta} \Leftrightarrow$

$f(\alpha)<f(\beta) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha<\beta$ που ισχύει.

2ος τρόπος

$\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$ (3). $\alpha<\beta \Leftrightarrow -\alpha>-\beta \Leftrightarrow 1-\alpha>1-\beta \Leftrightarrow \sqrt{1-\alpha}>\sqrt{1-\beta} \Leftrightarrow \sqrt{1-\alpha}-\sqrt{1-\beta}>0$ (4).

Από (3),(4) έχουμε $\alpha-\beta<\sqrt{1-\alpha}-\sqrt{1-\beta}$

Θέμα Δ

Δ1. $f(x)=e^x\left(e^{2x}-3e^x+3\right)-1=e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1=\left(e^x-1\right)^3$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε:

$e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}-1<e^{x_2}-1 \Leftrightarrow \left(e^{x_1}-1\right)^3<\left(e^{x_2}-1\right)^3 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$

Δ2. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow \left(e^x-1\right)^3=y$ (1)

Αν $y\geq 0$ τότε η (1) γίνεται: $e^x-1=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow e^x=\sqrt[3]{y}+1 \Leftrightarrow x=\ln\left(\sqrt[3]{y}+1\right)$.

Αν $y<0$ τότε η (1) γίνεται: $e^x-1=-\sqrt[3]{-y} \Leftrightarrow e^x=1-\sqrt[3]{-y}$

Πρέπει $1-\sqrt[3]{-y}>0 \Leftrightarrow 1>\sqrt[3]{-y} \Leftrightarrow -y<1 \Leftrightarrow y>-1$, τότε $x=\ln\left(1-\sqrt[3]{-y}\right)$.

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt[3]{y}+1\right), & y\geq 0\\ \ln\left(1-\sqrt[3]{-y}\right), & -1<y<0\end{cases}$ οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right), & x\geq 0\\ \ln\left(1-\sqrt[3]{-x}\right), & -1<x<0\end{cases}$

Δ3. $f^{-1}\left(f^{-1}\left(f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x\right)-x\right)>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x\right)-x>f(0)=0 \Leftrightarrow$

$f^{-1}\left(f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x\right)>x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \cancel{f(x)}+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x>\cancel{f(x)} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x+\pi-2x>0$ (2)

Έστω $h(x)=\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x,\ x\in[0,\pi]$

Έστω $x_1,x_2\in[0,\pi]$ με $x_1<x_2$, τότε: $\begin{cases}-2x_1>-2x_2\\ \sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x_1-2x_1>\sigma\upsilon\nu x_2-2x_2 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x_1-2x_1+\pi>\sigma\upsilon\nu x_2-2x_2+\pi \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2) \Rightarrow h\searrow[0,\pi]$.

$(2) \Rightarrow h(x)>h\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} x<\frac{\pi}{2}$ και επειδή $x\in[0,\pi]$, τελικά $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ4. $f^{-1}\left(\left(e^x+x-2\right)^3\right)-1=0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(\left(e^x+x-2\right)^3\right)=1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(\left(e^x+x-2\right)^3\right)\right)=f(1) \Leftrightarrow$

$\left(e^x+x-2\right)^3=(e-1)^3 \Leftrightarrow e^x+x-2=e-1 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow e^x+x-e-1=0$ (2).

Έστω $g(x)=e^x+x-e-1,\ x>0$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε: $e^{x_1}<e^{x_2}$, οπότε και

$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}+x_1-e-1<e^{x_2}+x_2-e-1 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g\nearrow(0,+\infty) \Rightarrow g$ 1-1.

Η (2) γίνεται: $g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=g(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.