

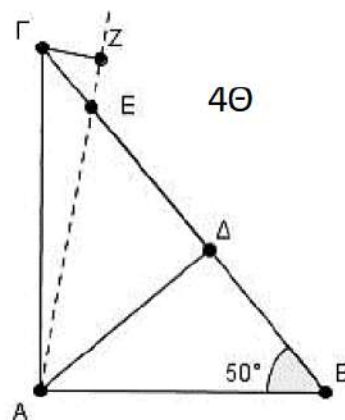
1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του AD και σημείο E στην $D\Gamma$ ώστε $DE = BD$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii. $\hat{\Gamma A E} = 10^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$. (Μονάδες 9)



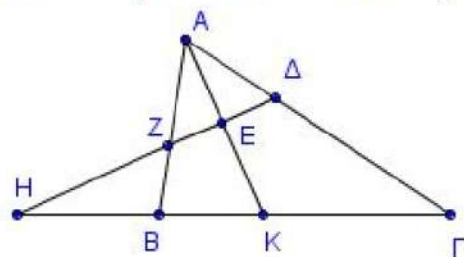
1792. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E

φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκτασή της ΓB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ (Μονάδες 7)

β) $ZK = K\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) $\hat{ZH\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ (Μονάδες 10)



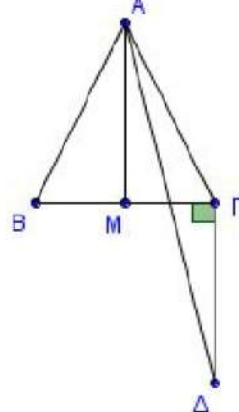
1888. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$ (Μονάδες 6)

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$. (Μονάδες 7)

γ) $\hat{\Delta A \Gamma} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 7)

δ) $A\Delta < 2AB$ (Μονάδες 5)



1709. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας A . Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma_{εξ}}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

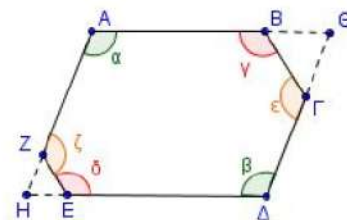
1746. Στο κυρτό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές AZ και ΔE προεκτείνόμενες τέμνονται στο H και οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ προεκτείνόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες A και H είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 10)

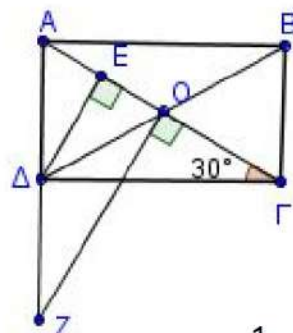
ii. Το τετράπλευρο $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\Delta\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκτασή της $A\Delta$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



13523. Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α) Να αποδείξετε ότι $AE = BD$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $AE \perp ED$.

(Μονάδες 08)

γ) i. Αν οι AD και BE τέμνονται στο O , τότε να αποδείξετε ότι $2BO = AD$. (Μονάδες 05)

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την AD που διέρχεται από το B . Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)



1840. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια, ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

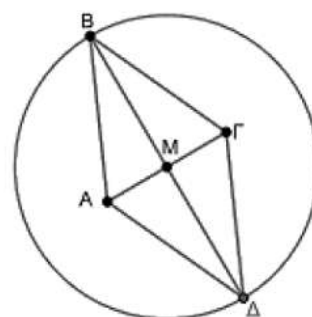
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου

13857.α) Στο σχήμα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο M . Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

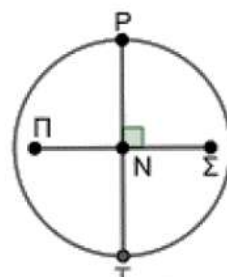


β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή. Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $\Pi\Sigma$ τέμνονται κάθετα στο N και $\Pi N = N\Sigma$. Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N . Να αποδείξετε ότι $\Pi P = P\Sigma = \Sigma T = T\Pi$. (Μονάδες 7)



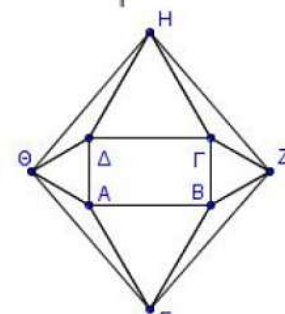
1734. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



1795. Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

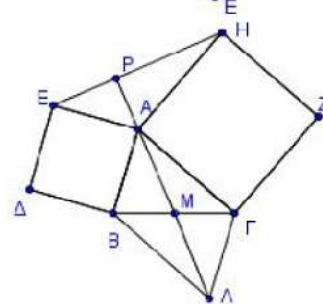
α) $\Gamma\Lambda = AE$.

(Μονάδες 10)

β) $\widehat{A\Gamma\Lambda} = \widehat{E\Lambda H}$.

(Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .



1814. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$. Αν η προέκταση της AM τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta\Lambda E} = 15^\circ$.

(Μονάδες 8)

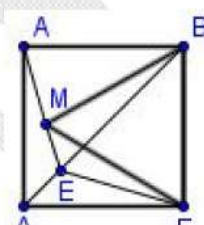
β) Τα τρίγωνα ΔAE και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma M$.

(Μονάδες 9)

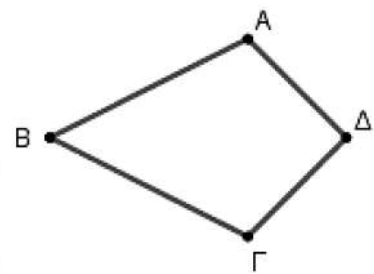
ΣΕΛ. 2



1745. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=B\Gamma$ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}$.

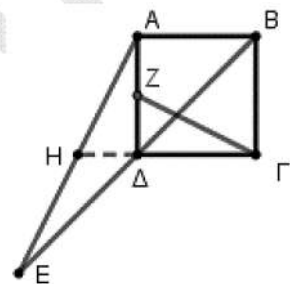
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
 β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)
 γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



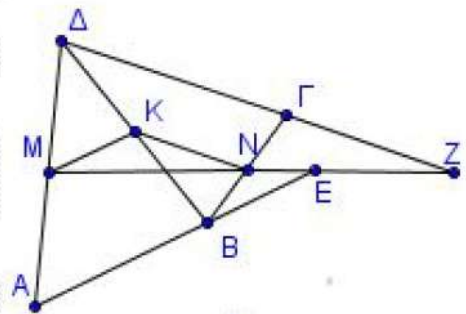
1766. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω E το συμμετρικό σημείο του B ως προς το Δ και Z είναι το μέσο της $A\Delta$. Η προέκταση της $\Gamma\Delta$ τέμνει την AE στο H . Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)
 β) Τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
 γ) Η ΓZ είναι κάθετη στην AE . (Μονάδες 8)



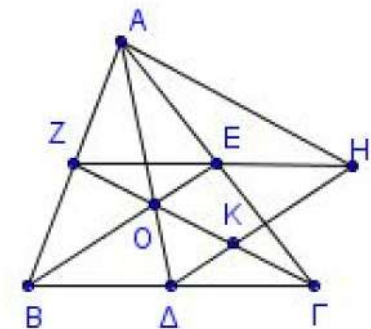
1804. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=\Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$, $B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των $AB, \Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) $MK=KN$ (Μονάδες 13)
 β) $M\hat{E}A = M\hat{Z}\Delta$ (Μονάδες 12)



1820. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του $A\Delta$, BE και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH=ZE$. Να αποδείξετε ότι:

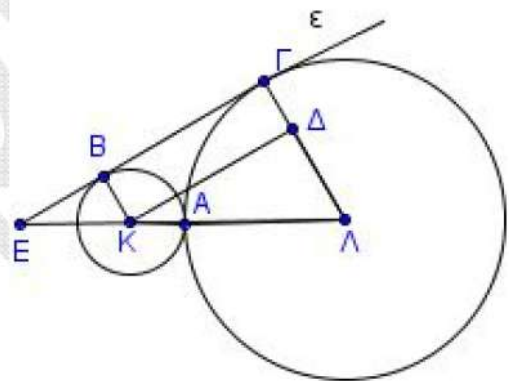
- α) Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
 β) Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)
 γ) Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$. (Μονάδες 8)



1721. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο A .

Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ϵ που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{K}\Lambda = 30^\circ$ (Μονάδες 8)
 γ) Να αποδείξετε ότι $E\Lambda = 6\rho$. (Μονάδες 8)

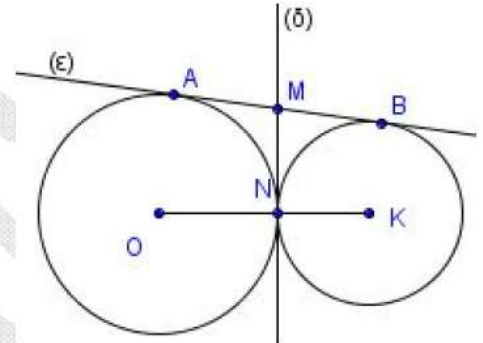


1737. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Έστω Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα και M, N οι προβολές των Δ, E στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $AH = A\Delta = AE$ (Μονάδες 10)
 β) Η γωνία $E\hat{H}\Delta$ είναι ορθή. (Μονάδες 8)
 γ) Τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \Delta E/2$. (Μονάδες 7)

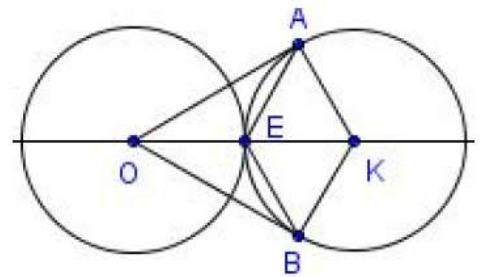
1771. Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)
 β) $\widehat{OMK} = 90^\circ$ (Μονάδες 9)
 γ) $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (Μονάδες 9)



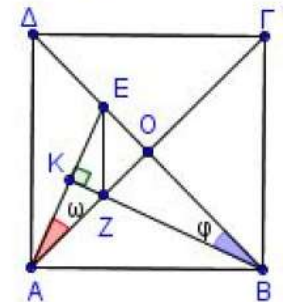
1796. Δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K, ρ) , να αποδείξετε ότι:

- α) $AE = BE$ (Μονάδες 9)
 β) $\widehat{AOK} = 30^\circ$ (Μονάδες 8)
 γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



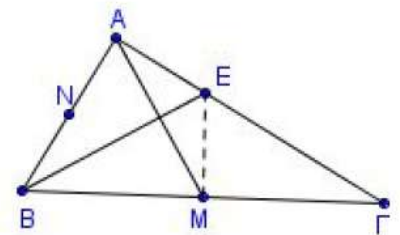
1748. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)
 β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$. (Μονάδες 12)
 γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ. (Μονάδες 7)



1835. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. (Μονάδες 6)
 ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}$ (Μονάδες 6)



- iii. η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 7)
 β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

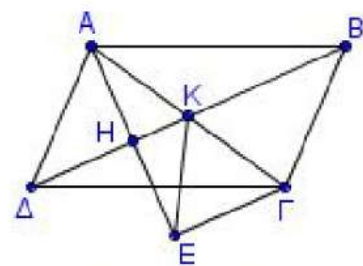
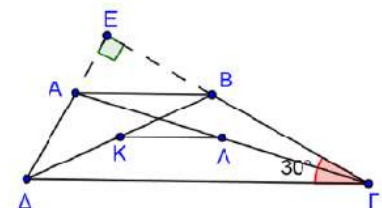
1736. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτενόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- α) $AB = 2AE$ (Μονάδες 10)
 β) $KL = \Delta\Delta$ (Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο;

1830. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΛΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΛΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
 β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
 γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



1861. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Delta\Delta = \Gamma\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγωνίες ΒΛ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
 β) $AE = BZ$. (Μονάδες 7)
 γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

