

αβλ. 5 / (ii)

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$\frac{1}{x^3} + \sqrt{x} > \sqrt{x^3} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^3} - \sqrt{x^3} > \frac{1}{x} - \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x^3) > f(x) \quad (1)$$

Για να η.ο.μ.ς ανισότητας

πρέπει: $x^3 > 0$ και $x > 0$

$$x^2 \cdot x > 0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

(1) $\uparrow$

$$x^3 < x \Leftrightarrow$$

$$x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

επειδή $x > 0$

αβλ. 6 ii)

$$x^2 + \ln x < x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$x^2 + 2 \ln x < \ln x + x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \ln x^2 < f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) < f(x) \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$x^2 < x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 1) < 0$$

	0	1	
$x^2 - x$	+	-	+

Άρα $x \in (0, 1)$ όλες

δεξιές.

αβν. 7]

$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$g(x) = |x-5| + 1$$

$$i) \quad f(5) = \frac{50}{25+25} = \frac{50}{50} = 1$$

→ Θ.δ.ο.

$$f(x) \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\frac{10x}{x^2 + 25} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\frac{10x}{x^2 + 25} - \frac{1}{1} \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\frac{10x - (x^2 + 25)}{x^2 + 25} \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\frac{10x - (x^2 + 25)}{x^2 + 25} \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$10x - (x^2 + 25) \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$10x - x^2 - 25 \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$-10x + x^2 + 25 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$x^2 - 10x + 25 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(x-5)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει

Άρα ισχύει ότι: $f(x) \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$

$$f(x) \leq f(5) \quad (\Leftrightarrow)$$

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=5$

$$(ii) \quad |x-5| \geq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$|x-5| + 1 \geq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad g(x) \geq 1 = g(5)$$

και το "=" ισχύει για $x=5$

Η $g(x)$ έχει 5 παραβολικά ελάχιστα

το 1

$$iii) \quad f(x) \leq f(5) = g(5) \leq g(x)$$

και το "=" ισχύει για $x=5$

Ασκ 3 / Φύλλα 01

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

i) Αν $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ii) $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 + 3 =$
 $= x^4 + 2x^2 + 3 = f(x)$

Άρα $f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ άρτια.

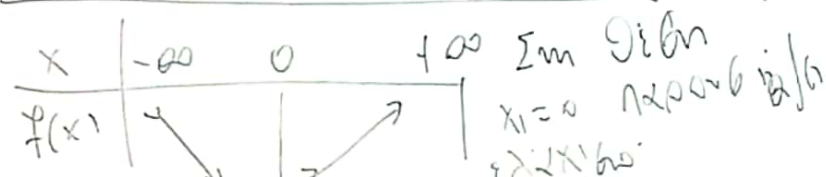
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 2x_1^2 < 2x_2^2 \Leftrightarrow$$
$$2x_1^2 + 3 < 2x_2^2 + 3$$
$$x_1^4 < x_2^4$$

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$



2ος τρόπος :

Έστω $0 \leq x_1 < x_2$. Έστω

η διαφορά $\Delta = f(x_2) - f(x_1) =$

$$x_2^4 + 2x_2^2 + 3 - x_1^4 - 2x_1^2 - 3 =$$

$$x_2^4 + 2x_2^2 - x_1^4 - 2x_1^2 =$$

$$x_2^4 - x_1^4 + 2(x_2^2 - x_1^2) =$$

$$(x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2) + 2(x_2^2 - x_1^2) =$$

$$(x_2^2 - x_1^2) \cdot (x_2^2 + x_1^2 + 2) > 0$$

$$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2$$

Άρα $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

Έστω $x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$-x_1 > -x_2 \geq 0 \Leftrightarrow f(-x_1) > f(-x_2)$$

$\stackrel{\text{f άρτια}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$. Άρα $f \downarrow (-\infty, 0]$

Ασκ.3 / Φύλλο 1 / 3^{ος} τρόπος

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 3.$$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ . Monotonic.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Έστω } n \text{ ενδιάμεσες} \\ g(x) = x^2 + 2x + 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Παρασμπ} \\ f(x) = g(x^2) \end{array} \right.$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$



$$\text{if } 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1^2 < x_2^2 \xrightarrow{g \uparrow} g(x_1^2) < g(x_2^2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \xrightarrow{g \uparrow} g(x_1^2) > g(x_2^2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Ασκ.4

$$f(x) = -x^2 + 6|x| + 1 =$$

$$= -|x|^2 + 6|x| + 1.$$

Έστω } ενδιάμεσες.

$$g(x) = -x^2 + 6x + 1$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = -\frac{6}{-2} = 3$$

$$g(3) = -9 + 18 + 1 = 10 \cdot (x)$$



Ασκ 5 / Φύλλο 1

(b) $3^x + 4^x + 5^x > 6^x$ (1). Η ανισότητα ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

$$\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x > 1 \quad (2)$$

Έστω $f(x) = \left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x$ ✓ (?)

$$(2) \Leftrightarrow f(x) > f(3)$$

$$x < 3$$

Πρόταση.

Βρίσκω αριθμό που να ικανοποιεί (1)
στην κρίση ισότητας.

$$3 + 4 + 5 = 6 \quad x$$

$$27 + 64 + 125 = 216$$

$$6^3 = 36 \cdot 6 = 216$$

$$x=3$$