

$$f: 1-1 \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f \text{ με } \overbrace{x_1 \neq x_2}^{\gamma} \Rightarrow \overbrace{f(x_1) \neq f(x_2)}^{\Sigma}$$

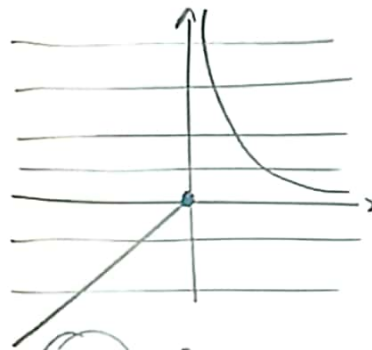
$$f: \text{not } 1-1 \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in D_f \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$M_1) f: 1-1 \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

M_2 Αν f είναι γνησίως μονότονη τότε f 1-1

Το αντίστροφο δεν ισχύει: $f(x) = x^2$ (X)

Ερωτ. Αν $\underbrace{f \text{ είναι } 1-1}_{\gamma}$ τότε $\underbrace{f \text{ γνησίως μονότονη}}_{\Sigma}$



$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

M_3 f είναι 1-1 $\Leftrightarrow$ κάθε εὐθεία $\varepsilon \parallel x'x$ τέμνει το C_f το πολύ 6 φορές
ένα βήμα.

M_4 f είναι 1-1 $\Leftrightarrow$ η εξίσωση $f(x) = a$ με $a \in f(A)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς $x \in D_f$

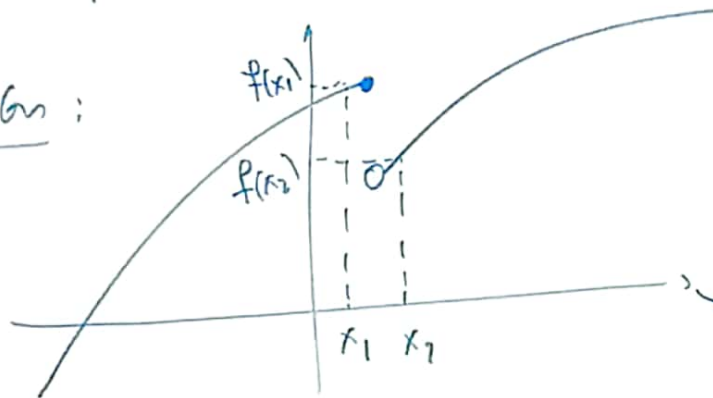
Ερωτήσεις Σ-Α

1) Αν $\underbrace{f \text{ όχι } 1-1}_\gamma$ τότε $\underbrace{f \text{ όχι γνήσιως μονότονη}}_\Sigma$

Ξέρω: αν $\underbrace{f \text{ είναι γνήσιως μονότονη}}_\gamma$ τότε $\underbrace{f \text{ είναι } 1-1}_\Sigma$

2) Αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδικό λύση ως προς x , τότε η f είναι 1-1 $\textcircled{\Sigma}$

Παρατήρηση:



$$x_1, x_2 \in D_f$$

$$\text{η } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

—> στην δεξιά είναι ↓

Άσκηση: Έστω $f(x) = x^2 - 2x + 17$, με $x \in [1, +\infty)$.

Να δ.ο. η f είναι 1-1.

1ος τρόπος

Έστω $x_1, x_2 \in A = [1, +\infty)$

και $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$$x_1^2 - 2x_1 + 17 = x_2^2 - 2x_2 + 17 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) - 2 \cdot (x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x_1 = x_2}_{\text{in}} \quad x_1 + x_2 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\text{Το "}" \text{ ισχύει}$$

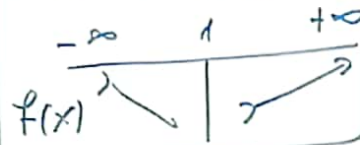
$$\Leftrightarrow \underbrace{x_1 = x_2 = 1}_{\text{in}}$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει $x_1 = x_2$

Αρα f : 1-1

$$\text{2ος τρόπος} \quad -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Α η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τότε



Τότε η $D_f = [1, +\infty) \rightarrow f$ είναι 1-1

3ος τρόπος Θα δ.ο. η f είναι

$f(x) = a$ έχει το πολύ 1 λύση ως προς $x \in D_f = [1, +\infty)$.

$$f(x) = a \Leftrightarrow x^2 - 2x + 17 = a \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + (17 - a) = 0.$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (17 - a) = 4 - 4(17 - a)$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq 4(17 - a) \Leftrightarrow 1 \geq 17 - a \Leftrightarrow$$

$$\underline{a \geq 16} \Rightarrow f(A) = [16, +\infty)$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{η λύση } \frac{2 - \sqrt{4(1 - 17 + a)}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{a - 16}}{2} = 1 - \sqrt{a - 16} < 1$$

Αρα μοναδική λύση η x_1

3) f ist eine 1-1 $\iff \exists x_1, x_2 \in D_f \mid x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ 1.
unabhängig

$$f(x) = x^2 \quad 1, 2 \quad 1 \neq 2 \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 4$$

4) 1. Gegeben $f(x) = x^{15} - x^{14} + 17$ ist eine 1-1. (1)

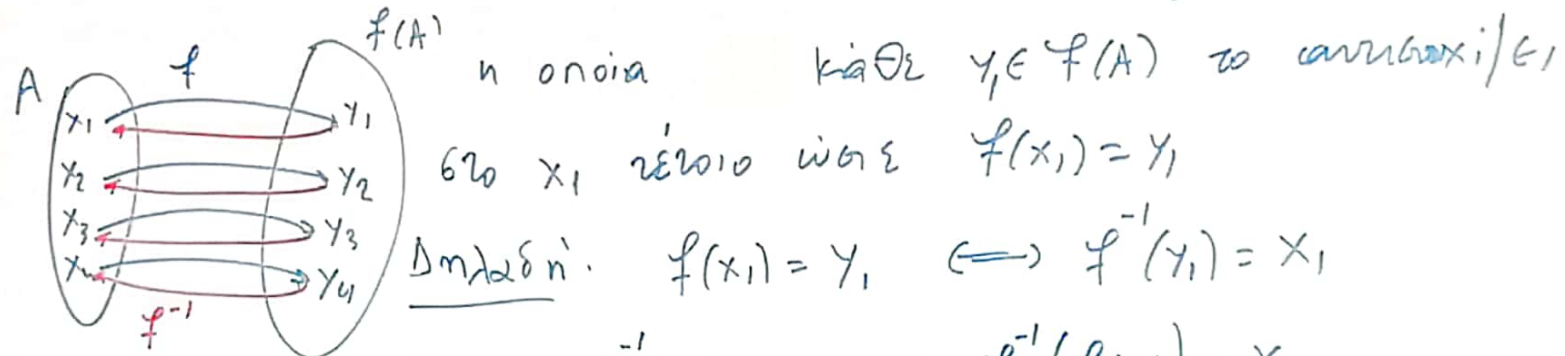
Oder bzw. $x_1, x_2 \in D_f \mid x_1 \neq x_2$ wäre $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x) = x^{14} \cdot (x - 1) + 17. \quad f(0) = 17, \quad f(1) = 17.$$

5) 1. Gegeben $f(x) = 15x^7 + x^5 + 2x^3 + x + 1$ ist eine 1-1 (2)

$$\text{Sei } x_1 < x_2 \implies \left. \begin{array}{l} x_1^7 < x_2^7 \implies 15x_1^7 < 15x_2^7 \\ x_1^5 < x_2^5 \\ x_1^3 < x_2^3 \implies 2x_1^3 < 2x_2^3 \\ x_1 < x_2 \implies x_1 + 1 < x_2 + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (+) \\ \implies f(x_1) < f(x_2) \implies \\ f \text{ ist 1-1} \end{array}$$

Αν γνωρίζουμε $f: A \rightarrow B$ είναι 1-1 τότε ορίζεται η αντιστροφή.

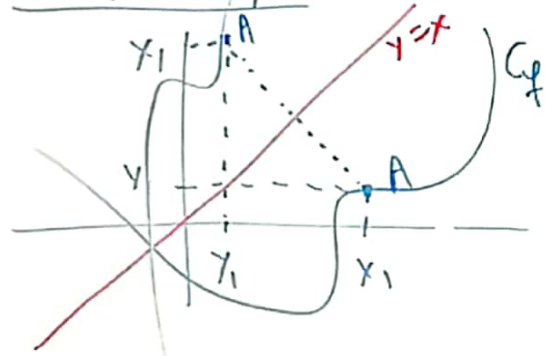


Παρατήρηση 1 Αφού $f^{-1}(y_i) = x_i \Rightarrow f^{-1}(f(x_i)) = x_i$
Γενικά $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in A = D_f$

Παρατήρηση 2 Αφού $f(x_i) = y_i \Rightarrow f(f^{-1}(y_i)) = y_i$
Γενικά $(f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in f(A)$

Παρατήρηση 3 Το π.ο. της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .

Παρατήρηση 4 Αν $A(x_i, y_i) \in C_f \Leftrightarrow f(x_i) = y_i \Leftrightarrow f^{-1}(y_i) = x_i$
 $\Rightarrow A(y_i, x_i) \in C_{f^{-1}}$



Οι γραφικές αναπαραστάσεις $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη διαγώνια 1^η-3^η τεταρτημόριου: $y=x$

Ερωτήσεις Σ - Α.

- 1) Ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$. (Α)
Το x "οφείλει" να βρίσκεται στο $D_{f^{-1}} = f(A)$, όχι στο D_f .
- 2) Ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in f(A)$ (Σ)
- 3) Ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D_f$ (Σ)
- 4) Δύο αντίστροφες συναρτήσεις έχουν γραφικές παραβάσεις συμπεριφορές ως προς τα άξονα x και y . (Α)
- 5) Οι συναρτήσεις $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln x, x > 0$ είναι αντίστροφες (Σ)