Σύνθεση & αντίστροφη

Άσκ. 2 | ε)

$f(x) = ημx + συνx \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

Θυμάμαι: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική $\iff$ $\exists\, T > 0$ ώστε $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα: $f(x) = ημx$, $g(x) = συνx$ } με περίοδο $T = 2π$ (Διότι $ημ(x+2π) = ημx$)

$F(x) = εφx$, $G(x) = σφx$ | με περίοδο $T = π$ (Διότι $εφ(π+x) = εφx$)

Σχόλιο $x \neq x+π$, $εφx = εφ(x+π)$ άρα όχι 1-1

Επιστροφή στην άσκηση: $f(0) = f(2π)$

$f(0) = ημ0 + συν0 = 0 + 1 = 1$. $f(2π) = ημ2π + συν2π = 0 + 1 = 1$

Scanned with CamScanner

γ) $f(x) = \underbrace{x^4}\cdot\underbrace{(x-1)} + 2$. $f(0) = f(1) = 2$ όχι 1-1

α) $ημ^5 x - συν^5 x = 3(συνx - ημx)$. $\Leftrightarrow$

$ημ^5 x - συν^5 x = 3συνx - 3ημx \Leftrightarrow$

$ημ^5 x + 3ημx = συν^5 x + 3συνx. \Leftrightarrow$

$f(ημx) = f(συνx) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow}$

$ημx = συνx \quad (1)$

Αν $συνx = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} ημx = 0$ άτοπο

Άρα $συνx \neq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{ημx}{συνx} = 1 \Leftrightarrow$

$εφx = 1 \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = κπ + π/4,\ κ \in \mathbb{Z}}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$f(x) = x^5 + 3x$

Θα μελετήσω την f ως προς τη μονοτονία. $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$

$3x_1 < 3x_2$ +

$x_1^5 + 3x_1 < x_2^5 + 3x_2 \Rightarrow$

$f \uparrow$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow 1-1$

Ασκ. 3 (δ)

$$x^9 + 2x^3 = 8x^3 + 4x \iff$$

$$x^9 - 6x^3 - 4x = 0 \iff$$

$$x \cdot (x^8 - 6x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad ή \quad x^8 - 6x^2 - 4 = 0$$

$\vdots$

$$\boxed{(x^3)^3 + 2 \cdot x^3 = (2x)^3 + 2 \cdot (2x)} \quad (1)$$

Θεωρώ $f(x) = x^3 + 2x$. $f \uparrow \Rightarrow$ 1-1

Η εξίσωση (1) $\iff$

$$f(x^3) = f(2x) \overset{f:1-1}{\iff}$$

$$x^3 = 2x \iff x^3 - 2x = 0 \iff$$

$$x \cdot (x^2 - 2) = 0 \iff$$

$$x = 0 \quad ή \quad x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

1	0	0	0	0	0	−6	0	−4	$\sqrt{2}$
	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	8	$2\sqrt{2}$	4	
1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	0	

$$x^7 + \sqrt{2}x^6 + 2x^5 + 2\sqrt{2}x^4 + 4x^3 + 4\sqrt{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$$

ασκ.4 Αν $f \circ f$ 1-1 $\Longrightarrow$ f 1-1

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow$

$$(f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2) \underset{1-1}{\overset{f \circ f}{\Longleftrightarrow}} x_1 = x_2$$ Άρα f 1-1

ασκ.5 f : 1-1 Τότε $g(x) = f^3(x) + 2f(x)$ είναι 1-1

Έστω $x_1, x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow$

$$\varphi(f(x_1)) = \varphi(f(x_2)) \overset{\varphi:1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow}$$

$x_1 = x_2$. Άρα g : 1-1

Έστω $\varphi(x) = x^3 + 2x$

Θ.δ.ο. $\varphi \uparrow \Rightarrow$ 1-1

$g(x) = \varphi(f(x))$