



$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$x(t) = 5t^2$$

$$x(1) = 5 \text{ m}$$

$$x(1.1) = 5 \cdot 1.1^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{x(1.1) - x(1)}{1.1 - 1} = \frac{5 \cdot 1.1^2 - 5 \cdot 1^2}{0.1} = \frac{5(1.1^2 - 1^2)}{0.1} \\ &= \frac{5 \cdot (1.1 - 1)(1.1 + 1)}{0.1} = 5 \cdot 2.1 = 10.5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1.01 \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1.01) - x(1)}{1.01 - 1} = \\ &= \frac{5 \cdot 1.01^2 - 5 \cdot 1^2}{1.01 - 1} = \frac{5 \cdot (1.01 - 1) \cdot (1.01 + 1)}{1.01 - 1} = \\ &= 5 \cdot 2.01 = 10.05 \text{ m/s} \rightarrow 10.005 \end{aligned}$$

$$t_1 = 1s, t_2 = 1 + \Delta t$$

$$v = \frac{x(1+\Delta t) - x(1)}{\Delta t} = \frac{5 \cdot (1+\Delta t)^2 - 5 \cdot 1^2}{\Delta t} = \frac{5 \cdot (1+\Delta t - 1) \cdot (1+\Delta t + 1)}{\Delta t}$$

$$= 5 \cdot (2 + \Delta t) = 10 \text{ m/s}$$

$$f(x) = \frac{5x^2 - 5}{x - 1}, D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f(1,01) = 10,05$$

$$f(1,001) = 10,005$$

$$f(x) = \frac{5 \cdot (x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = 5x + 5$$

$$f(0,99) = 9,95$$

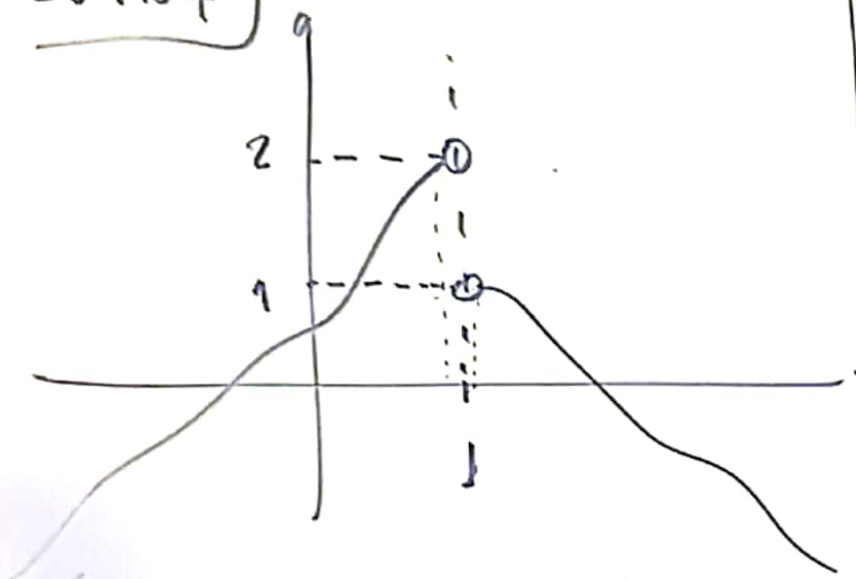
$$f(0,999) = 9,995$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 10, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

To όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει όταν

Συναρτήσεις που δεν
είναι



~~2. $f(1)$, $\delta m \lambda$ $1 \notin D_f$~~

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

~~$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$~~

έχουν όριο που κάνοιό x_0
2ο αλφάβ. $\heartsuit$ $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

αν $x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

αν $x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

~~$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$~~

Συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοιχτά διαστήματα
μορφής $(x_0, +\infty)$ ή μορφής $(-\infty, x_0)$.

Π.ρ. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, +\infty)$.

Δεν μπορεί να μιλήσω για $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

όπως το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. Τότε λέμε ότι $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Αντίστοιχα αν μια συνάρτηση δεν ορίζεται δεξιά του x_0 .

Π.π. $g(x) = \sqrt{-x}$, $D_g = (-\infty, 0]$

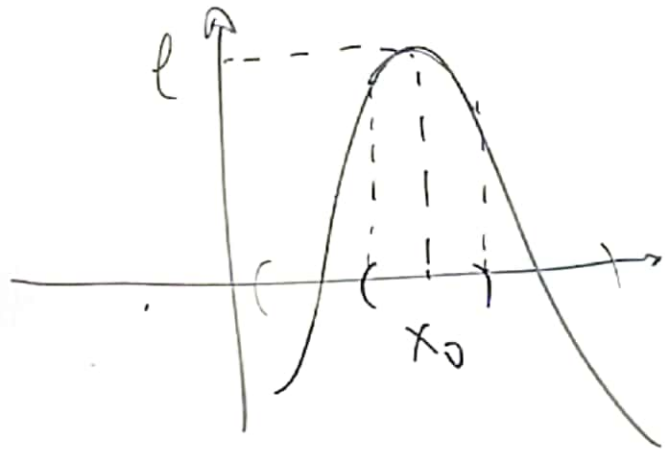
Δε μπορεί να μιλήσω για $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

Όμως $\exists \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$. Αρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$

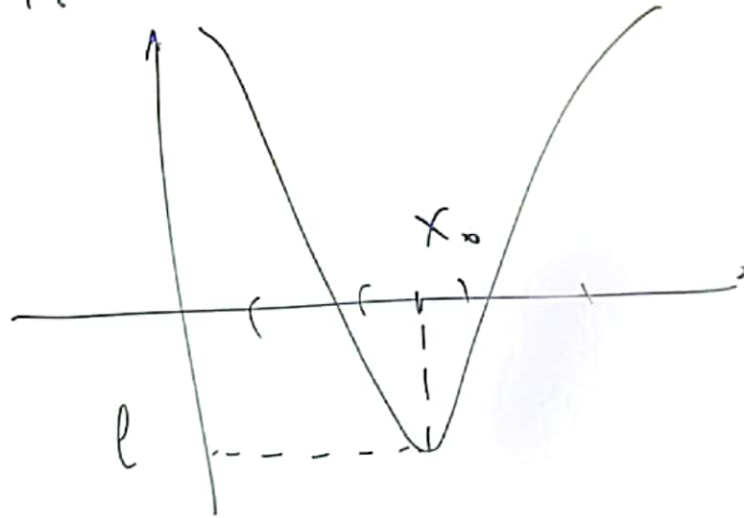
'Opio kon diazōn:

⊖ ε-δ limit 1 A lim f(x) = l.

- 1) $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta$ $f(x) > 0$ $\forall x$ x $\in$ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $x \neq x_0$
2) $\forall \epsilon < 0$ $\exists \delta$ $f(x) < 0$ $\forall x$ $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $x \neq x_0$



$l > 0, f(x) > 0$
koria $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

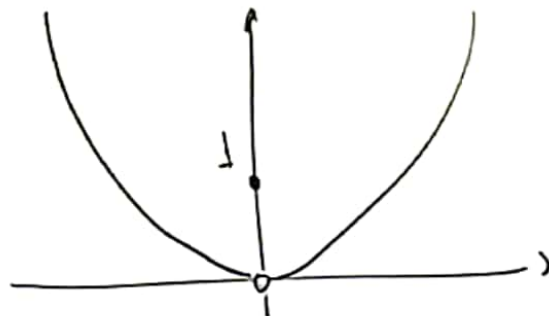


$l < 0, f(x) < 0$
koria $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Επίπλευση:

Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε
 υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. $l \geq 0$ (?) 0x1

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Θεώρημα: Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
 με $l \geq 0$.

Προβληματισμός: Γιατί $l < 0$ (?) Απάντηση: Αν $l < 0$, τότε

δεν το προηγούμενο Θεώρημα θα ισχύει
 $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 . Άρα

Σχόλ. βιβλίου: Σελ. 48

Θεώρημα 2. f, g έχουν όριο στο x_0 $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \end{array} \right.$

$\Sigma x_0 \lambda_{1,0}$ (απόδειξη) 2ου Θεωρήματος 2

$$f(x) \leq g(x) \iff \underbrace{f(x) - g(x)}_{A(x)} \leq 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \quad \square$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

S.O.S. για $\Sigma - \Pi$. Αν $f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ κοντά υπάρχουν τα όρια
τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

$\Sigma \epsilon \lambda. 83 / \Sigma x \in \mathbb{R}$ bi-bi-o ερωτ. 4 Αν $f(x) > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ κοντά υπάρχουν
τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$ (1)

Όριο και πράξεις

Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε ισχύουν:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{Με την προϋπόθεση ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (c) = c$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \quad \text{Με την προϋπόθεση ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$$

$$\text{Θεώρημα} \quad \text{Αν } P(x) \text{ πολυώνυμο, τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Όριο και πράξεις

Α. Δεν έχω την πληροφορία

ή να υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε ισχύει

Ερ. 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (?) Απάν. 'όχι'

Ερ. 2 Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_2 \in \mathbb{R}$.

Ερωτήματα: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ υπάρχει; (Σ)

Ερ. 2 / Ονομάζω $A(x) = f(x) + g(x) \Leftrightarrow g(x) = A(x) - f(x)$
ξέρω ότι $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} A(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Άρα προηγούμενο θεώρημα 2

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (A(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (!!)