

Agk. 10.

$$\frac{f(x) - x}{f(x) + x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0$$

$$(f(x) - x) \cdot (f(x) + x) < 0 \Leftrightarrow f^2(x) - x^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f^2(x) < x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0.$$

$$\text{ii) } \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{f^2(x)} < \sqrt{x^2} \Leftrightarrow 0 \leq |f(x)| < |x|$$

$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$. Ano κριτήριο ολίσθησης.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0.$$

$$\text{iii) } \text{Αναι } |f(x)| < |x| \Leftrightarrow -|x| < f(x) < |x| \left\{ \begin{array}{l} \text{Αν το κριτήριο} \\ \text{ολίσθησης} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{array} \right.$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$$

Σ-11 Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l^2$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{l}$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\sqrt{l}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x)} = \sqrt{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \sqrt{l}.$$

Πρόβλημα.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l > 0$, τότε δεν ξέρω αν υπάρχει

το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Πράγματι: $f(x) = \frac{|x|}{x}$. ~~$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$~~

$$f^2(x) = \frac{|x|^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 1$$

Ομοίως: $|f(x)| = \left| \frac{|x|}{x} \right| = \frac{|x|}{|x|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$

Ερωτήσεις: Σ - 1

1) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l > 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{l}$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\sqrt{l}$. (Σ)

Ανάλυση: Έχω $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^2 = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \sqrt{l}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \sqrt{l}$ (Λ)

Σύμφωνα με Σ-Λ.

2) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. (Σ)

Απόδειξη: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ Ανι κριτήριο ολροφύλωσης
 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

3) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (Σ)

Απόδειξη: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} \stackrel{*}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x)} = \sqrt{0} = 0$

Από $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$

4) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^4(x) = l > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \sqrt[4]{l}$ (Λ)

Αν υποθέτουμε: $f(x) = \frac{1}{x}$ $f^4(x) = \frac{1}{x^4} = 1$

5) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^4(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (Σ)

6) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \sqrt{l}$ (Σ)

$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)}$
 $= \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x)} = \sqrt{l}$

7) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε υπάρχουν και
το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (1)

Αντιπαράδειγμα $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$. $g(x) = -\frac{|x|}{x} + x$

$$f(x) + g(x) = 2x . \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} 2x = 2x_0$$

— — — — —