Ασκ. 11. $f \uparrow / \mathbb{R}$, $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{f(2x)} = 1.$

i) Αφού $x > 0 \Rightarrow 4x > 3x > 2x$

Αφού $\uparrow \Rightarrow f(4x) > f(3x) > f(2x)$ ο.ε.δ.

$2x > 3x \Leftrightarrow 2x - 3x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ok.

Τώρα $2x > 3x > 4x \xrightarrow{f \uparrow} f(2x) > f(3x) > f(4x)$.

ii) Για $x > 0$ έχω $f(2x) < f(3x) < f(4x) \Rightarrow$ $f(x) > 0$ από (Y)

$$\frac{f(2x)}{f(4x)} < \frac{f(3x)}{f(4x)} < 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(2x)}{f(4x)} \xrightarrow[\text{όταν } x\to 0^+ \text{ } u \to 0^+]{2x = u} \lim_{u\to 0^+} \frac{f(u)}{f(2u)} = 1$$

Από κριτήριο παρεμβολής $\rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(3x)}{f(4x)} = 1$

Ομοίως για $x < 0$ ...

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(3x)}{f(4x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{f(2024x)} \quad \cdots \quad 1$$

Ασκ. 12

$2 + f(x) \geq \sqrt{x^2+4}$ (1)

$4f(x) \leq f^2(x) + x^2$ (2)

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$

i) (1) $\Rightarrow f(x) \geq \sqrt{x^2+4} - 2$

Για $x>0$ $\quad \dfrac{f(x)}{x} \geq \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

Από Θεωρ "Όριο + διάταξη" $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+\cancel{4}-\cancel{4}}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$$

Για $x<0$ $\quad \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 0$$

$\lambda = 0$

(ii)

$$\sqrt{x^2-4} - 2 \leq f(x) \leq \frac{f^2(x)+x^2}{4} \overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-4}-2}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}{4} \quad (3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2-4}-2}{x^2} = \dots \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f^2(x)}{x^2}+1}{4} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4}$$

Λήμμα: Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to x_0} B(x) = 0$

Τότε. $\lim_{x \to x_0} A(x) = 0$

Θέτω $\frac{A(x)}{B(x)} = \Gamma(x)$. Ξέρω $\lim_{x \to x_0} \Gamma(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$A(x) = B(x) \cdot \Gamma(x)$.

$\lim_{x \to x_0} \left(B(x) \cdot \Gamma(x) \right) = \lim_{x \to x_0} B(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \Gamma(x) = 0 \cdot \ell = 0$

Άρα $\lim_{x \to x_0} A(x) = 0$.