Άσκ. 1

(ε) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4} = L$

αριθμ. $(-2)^2-4\cdot(-2)+4 = 4+8+4=16$

παρον. $(-2)^2+4(-2)+4 = 4-8+4=0$

Μορφή $\dfrac{\alpha}{0}$

1	4	4	−2
↓	−2	−4	
1	2	$\boxed{0}$	

παραγοντοποίηση

$(x+2)\cdot(x+2) = (x+2)^2$

Τότε $L = \lim\limits_{x\to -2}\left[(x^2-4x+4)\cdot\dfrac{1}{(x+2)^2}\right] = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4x+4) = 16 > 0$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2} = +\infty$

Βοήθεια για τον υπολογισμό ορίου του $x\to x_0$

1) Το Μετράμε: κατηγορία $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\alpha}{0}$, ... $0\cdot\pm\infty$

2) Αν υπάρχει 0 τότε σημαίνει ότι x_0 είναι ρίζα τότε υπάρχει παράγοντας $x-x_0$ τότε παραγοντοποιώ (π.χ. Horner) και βγάζω όσους παράγοντες $x-x_0$ μπορώ.

Επισήμανση:

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4} = \dfrac{16}{0^+} = +\infty$

$= 16\cdot\dfrac{1}{0^+} = 16\cdot(+\infty) = +\infty$

Scanned with CamScanner

Ασκ. 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^3-4x^2+5x-2}=L$$

$x^2-5x+4 \to (x-1)\cdot(x-4)$

αριθμ. $1-3+2=0$

παρον. $1-4+5-2=0$

1	-4	5	-2	1
↓	1	-3	2	
1	-3	2	$\boxed{0}$	

1	-3	2	1
↓	1	-2	
1	-2	$\boxed{0}$	

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x-4)}{(x-1)^{\cancel{2}}(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-4}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}\right).$$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)=\frac{-3}{-1}=3>0.$ $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty,$ $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-4}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x-4}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$$

Άρα $\nexists$ το ζητούμενο όριο

Ασκ. 1

1) $$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x^2 - 3\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{x+2\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{4x^2-3\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x}+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) = -\infty$$

$$x+2\sqrt{x}-3 = x+2\sqrt{x}-1-2 = (\sqrt{x}^2-1)+2(\sqrt{x}-1) =$$

$$\underbrace{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-1)} = (\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1+2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4x^2-3\eta\mu\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{x}+3} = \frac{4-3\eta\mu\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}-1} = -\infty$$

αφού $0<x<1 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow \sqrt{x}-1<0$

2ος τρόπος παραγοντοποίησης πολυωνύμου με ρίζα

$$x+2\sqrt{x}-3 = y^2+2y-3 =$$

θέτω $\sqrt{x}=y$

$$=(y-1)\cdot(y+3) =$$

$$=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)$$

Άσκ. 1

(ιβ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3ημ^2x - 5συνx}{ημx} = \lim\limits_{x\to 0}\Big[\underbrace{(3ημ^2x - 5συνx)}_{A(x)} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{ημx}}_{B(x)}\Big]$

αριθμ. $3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -5 < 0$

παρονομ. $ημ0 = 0$

Μορφή $\dfrac{α}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0} A(x) = -5 < 0$

αν $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right) \to ημx > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{ημx} = +\infty$.

τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} \big[A(x)\cdot B(x)\big] = -\infty$

αν $x \in \left(-\frac{π}{2}, 0\right) \Rightarrow ημx < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{ημx} = -\infty$

τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} \big[A(x)\cdot B(x)\big] = +\infty$

Άρα $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \big[A(x)\cdot B(x)\big]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ημx - 2}{συνx - 1} = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{(ημx-2)}_{A(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{συνx - 1}}_{B(x)}\right] = +\infty$$

αριθ. -2
παρον. 0
$\frac{a}{0}$

$\lim_{x\to 0} A(x) = -2 < 0$

Αφού $-1 \le συνx \le 1 \Rightarrow συνx - 1 \le 0$. Για $x \ne 0$, κοντά στο 0

$συνx - 1 < 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{συνx-1} = -\infty$

2ος τρόπος:

$$\lim_{x\to 0}\left[(ημx-2)\cdot\frac{1}{συνx-1}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx-2}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{συνx-1}{x^2}}\right) = +\infty$$

$\lim_{x\to 0} \frac{συνx-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{συνx-1}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{ημx}{x} = 1 \ne 0$

$\lim_{x\to 0}\left[(ημx-2)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = -\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{συνx-1}{x^2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\varepsilon\varphi x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\Big(\underbrace{\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}}_{A(x)}\Big)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x) = 1$$

για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $\sigma\upsilon\nu x > 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} A(x) = +\infty$

για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. $\sigma\upsilon\nu x < 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} A(x) = -\infty$

$$\nexists \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} A(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi x$$

Ομοίως $\lim_{x\to 0}(\sigma\varphi x)$

Scanned with CamScanner

Παραμετρικά όρια

άσκ. 2

$$\lim_{x\to -1} \underbrace{\frac{x^3+\lambda x-2}{x^2+2x+1}}_{\to A(x)}$$

αριθμ. $-1-\lambda-2=-\lambda-3$

παρον. $(-1)^2+2\cdot(-1)+1=0$

1η περ. $-\lambda-3=0 \Leftrightarrow -\lambda=3 \Leftrightarrow$ $\lambda=-3$

$$\lim_{x\to -1} A(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}=$$

1	0	-3	-2	-1
↓	-1	1	2	
1	-1	-2	$\boxed{0}$	

1	-1	-2	-1
↓	-1	2	
1	-2	$\boxed{0}$	

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2\cdot(x-2)}{(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-2)=-3.$$

2η περ. $-\lambda-3>0 \Leftrightarrow$

$-\lambda>3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda<-3}$

$$\lim_{x\to -1} A(x)=$$

$$\lim_{x\to -1}\left[\underbrace{(x^3+\lambda x-2)}_{B(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\Gamma(x)}\right]$$

$\lim_{x\to -1} B(x)=-\lambda-3>0$

$\lim_{x\to -1} \Gamma(x)=+\infty$

Άρα $\lim_{x\to -1} A(x)=+\infty$

3η περ. $-\lambda-3<0 \Leftrightarrow$

$-\lambda<3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda>-3}$

$$\lim_{x\to -1} A(x)=\lim\left[\underbrace{(x^3+\lambda x-2)}_{B(x)}\underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\Gamma(x)}\right]$$

$\lim_{x\to -1} B(x)=-\lambda-3<0$

$\lim_{x\to -1} \Gamma(x)=+\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to -1} A(x)=-\infty.$

$$\lim_{x\to -1} A(x)=\begin{cases}-3, & \text{αν } \lambda=-3\\ +\infty, & \text{αν } \lambda<-3\\ -\infty, & \text{αν } \lambda>-3\end{cases}$$

Scanned with CamScanner