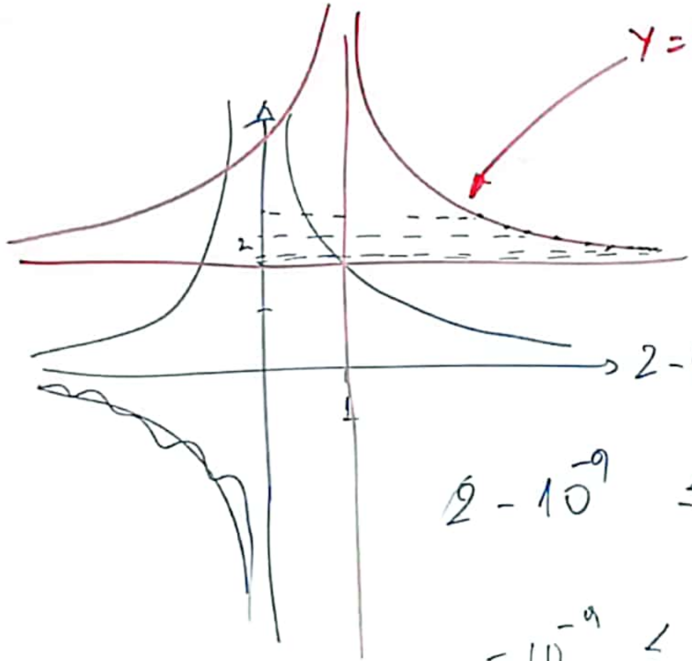
Όρια του x τείνοντος στο ∞.

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|} + 2$$

$\frac{1}{|x|}$ $\qquad$ $\frac{1}{x}$



$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}$$

$$2-10^{-9} \le f(x) \le 2+10^{-9} \iff$$

$$\cancel{2} - 10^{-9} \le \frac{1}{|x-1|} + \cancel{2} \le \cancel{2} + 10^{-9} \iff$$

$$-10^{-9} \le \frac{1}{|x-1|} \le 10^{-9} \iff$$

$$0 < \frac{1}{|x-1|} \le \frac{1}{10^{9}} \iff$$

$$|x-1| \ge 10^{9} \iff$$

$x-1 \ge 10^9$ ή $x-1 \le -10^9$

$\boxed{x \ge 1+10^9}$ $\qquad$ $\boxed{x \le 1-10^9}$

Ιδιότητες

1) $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \to +\infty} x^{\nu} = +\infty$.

2) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \to -\infty} x^{2k} = +\infty$

3) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty$

Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_\mu x^\mu + b_{\mu-1}x^{\mu-1} + \dots + b_1 x + b_0$

$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_\nu x^\nu)$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_\nu x^{\nu-1}}{b_\mu x^{\mu-1}}$

- Αν $\lim_{x \to} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{f(x)} = 0$. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$

- Αν $\lim_{\substack{x_0 \\ \pm\infty}} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο $\begin{matrix} x_0 \\ \pm\infty \end{matrix}$ $\Rightarrow$

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \pm\infty}} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

- $\lim_{\substack{x_0 \\ \pm\infty}} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{\substack{x_0 \\ \pm\infty}} |f(x)| = +\infty$.

ΣΕΛ 68

άσκ. 1. (i) $\lim_{x\to+\infty}(-10x^3) = -\infty$.

iii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^3} = 0$

(v) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\cancel{x^3}}{4\cancel{x^3}} = \frac{1}{2}$

(viii) $-\infty+\infty = ?$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2}\right) =$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)\cdot(x^2+5) - x\cdot(x^2+3)}{x\cdot(x+2)} = \lim\frac{x^3+2x^2+5x+10-x^3-3x}{x^2+2x}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x+10}{x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2} = 2$

άσκ. 2 (v)

$\lim_{x\to+\infty}\left[(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+3}\right]$

άσκ. 3 (iii)

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot(1+1/x^2)}}{x} =$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+1/x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{1+1/x^2}}{\cancel{x}} = -1$

Σελ 68

(vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\sqrt{2x^2+3x+2}-x^2\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\sqrt{2+3/x+2/x^2}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\underbrace{\left(\sqrt{2+3/x+2/x^2}-1\right)}_{A(x)}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=\sqrt{2}-1>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{x^2+3x+2}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\underbrace{\left(\sqrt{1+3/x+2/x^2}-1\right)}_{B(x)}\right]=\ ?$

$\lim\limits_{x\to+\infty}B(x)=0$

Όρια της μορφής $\infty-\infty$ που έχουν και ρίζες ... με τη μορφή: $\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}$

1) Αν βαθ$P(x)\neq$ βαθ$Q(x)$ τότε βγαίνει ∞

2) Αν βαθ$P(x)=$ βαθ$Q(x)$ και είναι διαφορετικοί οι μεγιστοβάθμιοι, τότε βγαίνει ∞

3) » » » » » ίσοι » » τότε θέλει συζυγή.

ΣΕΛ 68 άσκ. 1 - Β' ΟΜ

i) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+1/x^2}+\mu x\right)=$

$=\lim_{x\to-\infty}\Big[x\underbrace{\left(-\sqrt{1+1/x^2}+\mu\right)}_{A(x).}\Big]=L$. $\lim_{x\to-\infty}A(x)=\mu-1$

1η περ. Αν $\mu-1>0 \Leftrightarrow \mu>1$ τότε $L=-\infty$

2η περ. Αν $\mu-1<0 \Leftrightarrow \mu<1$ τότε $L=+\infty$

3η περ. Αν $\mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$

Πάω στο αρχικό, βάζω $\mu=1 \to \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$

Αποτελέσματα: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \mu>1\\ +\infty, & \text{αν } \mu<1\\ 0, & \text{αν } \mu=1\end{cases}$

ΣΕΛ 69 ασκ. 1 - Β' ομ

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6} = L$

$$L=\begin{cases} +\infty & , \mu \in (-\infty,0] \cup (1,+\infty) \\ -\infty & , \mu \in (0,1) \\ 2 & , \mu = 1 \end{cases}$$

1η περ. Αν $\mu-1 \neq 0$ και $\mu \neq 0$

$\mu \neq 1$

τότε $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mu-1}{\mu} \cdot x$

περ. 1α $\dfrac{\mu-1}{\mu} > 0 \Leftrightarrow (\mu-1)\cdot\mu > 0 \Leftrightarrow$

	0		1	
+		−		+

$\Leftrightarrow \mu \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

τότε $L = +\infty$

περ. 1β $\dfrac{\mu-1}{\mu} < 0 \Leftrightarrow \mu \in (0,1)$ τότε $L = -\infty$

2η περ. $\mu = 0$. $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{-5x} = \dfrac{1}{5} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

3η περ. $\mu = 1$. $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+3}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

Scanned with CamScanner

Σελ 69 ασκ.4 - Β' ομ

i) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+x}{x^2-3x+2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5x)=+\infty \to$$

$x^2-5x>0$ κοντά στο $-\infty$.

ii) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+1/x^2}+5-x}{x+|x|\cdot\sqrt{4/x^2+3}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1+1/x^2}+5-x}{x-x\sqrt{4/x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(-\sqrt{1+1/x^2}+5/x-1\right)}{\cancel{x}\cdot\left(1-\sqrt{4/x^2+3}\right)}=$$

$$=\frac{-1-1}{1-\sqrt3}=\frac{-2}{1-\sqrt3}=\frac{2}{\sqrt3-1}.$$

παρατηρησις

έλεγχος $x+\sqrt{3x^2}=$

$x+\sqrt3\cdot|x|=x-\sqrt3 x$

όχι $0\cdot x$